This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

600047051N

E. 1. N 14

OXFORD MUSEUM.

LIBRARY AND READING-ROOM.

THIS Book belongs to the "Student's Library."

It may not be removed from the Reading Room without permission of the Librarian.

C

1820 e. 73

ÉLÉMENTS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

ÉLÉMENTS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. DUHAMEL,

MEMBRE DE L'INSTITUT (ACADÉMIE DES SCIENCES).

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET ANNOTÉE

Par M. J. BERTRAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

TOME PREMIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1874

(Tous droits réservés.)

RADCLIFFE LIBRARY
7 MAR 79

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.
AVERTISSEMENT DE LA TROISIÈME ÉDITION XIII
PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION XV

LIVRE I.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES.

CHAPITRE PREMIER.
De la mesure des grandeurs et des nombres en général 1

CHAPITRE II.
Des fonctions en général et de la continuité 7

CHAPITRE III
Premiers principes de la théorie des limites 11
Limite d'une variable 12
Infiniment petits 12
Principe fondamental des limites 13
Limites des sommes, produits, quotients ou puissances quelconques de variables 13
Méthode des limites 14
Applications aux cas simples que présente la Géométrie élémentaire 15

CHAPITRE IV.
Réflexions au sujet de quelques définitions 17
De l'infini 17
Des nombres incommensurables 19
De l'équivalence 21

CHAPITRE V.

Pages.

Des différentes manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites de variables..... 23

CHAPITRE VI.

Des grandeurs considérées comme limites de séries..... 26

CHAPITRE VII.

Des grandeurs considérées comme limites de sommes d'infiniment petits..... 39
Théorème fondamental..... 39
Divers ordres d'infiniment petits..... 42

CHAPITRE VIII.

Comment les aires des courbes planes peuvent être considérées comme limites de sommes d'infiniment petits..... 45
Sommes de parallélogrammes infiniment petits..... 45
Sommes de trapèzes infiniment petits..... 47
Sommes de secteurs infiniment petits..... 47

CHAPITRE IX.

Application des principes précédents à quelques exemples..... 50

CHAPITRE X.

Comment les volumes des corps peuvent être considérés comme limites de sommes d'infiniment petits..... 66
Solides de révolution..... 66
Solides terminés par des surfaces quelconques..... 68

CHAPITRE XI.

Application à la mesure de quelques volumes..... 71

CHAPITRE XII.

Pages.
Applications mécaniques. Détermination des centres de gravité. 80

CHAPITRE XIII.

Des quantités considérées comme limites de rapports d'infiniment petits..... 90
Tangentes aux courbes rapportées à divers systèmes de coordonnées..... 90
Coordonnées rectilignes..... 90
Coordonnées polaires..... 92
Troisième système de coordonnées..... 93
Autre système de coordonnées..... 95
Coordonnées angulaires..... 96
De l'existence des tangentes en général..... 98
Théorème général..... 99
Dérivées des fonctions..... 103
Du problème réciproque..... 108

CHAPITRE XIV.

Applications diverses des méthodes exposées dans le chapitre précédent..... 111

CHAPITRE XV.

De la longueur des lignes courbes et de l'aire des surfaces courbes. 130

CHAPITRE XVI.

Applications mécaniques des limites des rapports d'infiniment petits..... 142

CHAPITRE XVII.

Remarques et théorèmes propres à faciliter l'emploi des infiniment petits..... 148

CHAPITRE XVIII.

Pages.

Courbure des arcs de courbes planes quelconques, et diverses propositions qui s'y rapportent..... 158
Exemples de la détermination des centres de courbure..... 176

CHAPITRE XIX.

Développées des courbes planes..... 181

CHAPITRE XX.

Déplacement d'une figure sur un plan. Problème de la roulette. Méthode de Descartes pour mener les tangentes aux courbes auxquelles il conduit. Généralisation de cette question. Centre instantané de rotation..... 186
Expression du rayon de courbure de la courbe décrite par un point lié à la courbe roulante..... 189
Application aux épicycloïdes. Leur double génération..... 191
Comment tout déplacement continu se ramène au roulement d'une courbe sur une autre..... 197
Moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un point quelconque du système, quand on connaît les tangentes aux trajectoires de deux points particuliers..... 199

CHAPITRE XXI.

Des courbes enveloppes..... 204
Caustiques..... 209
De l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre..... 214
Rayon de courbure de cette enveloppe..... 216
Mesure du glissement de la courbe mobile sur son enveloppe.. 218

CHAPITRE XXII.

Cercle osculateur..... 221
Résumé du Livre I..... 224

LIVRE II.

CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

Pages.

Des dérivées, des différences et des différentielles des fonctions d'une seule variable. Notations..... 227
Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées..... 230
Différentiation des fonctions de fonctions..... 232
Différentiation des fonctions inverses..... 233

CHAPITRE II.

Expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables dépendantes ou indépendantes..... 235
Différentiation des fonctions composées..... 237
Théorème des fonctions homogènes..... 239
Différentielle d'une somme, d'un produit ou d'un quotient..... 240
Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples..... 240

CHAPITRE III.

Différentiation des fonctions simples..... 242
Différentiation des fonctions implicites..... 251

CHAPITRE IV.

Expression du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable..... 253

CHAPITRE V.

Différentielles et différences d'un ordre quelconque de fonctions d'une seule variable..... 261

CHAPITRE VI.

Pages.

Différentielles, dérivées et différences partielles des divers ordres, des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différences et différentielles totales..... 267
De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations..... 270
Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes.. 272
Différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables dépendantes..... 277
Différentielles des divers ordres des fonctions implicites..... 278
Changement de variables..... 281
Cas d'une seule variable indépendante..... 281
Cas de plusieurs variables indépendantes..... 285

CHAPITRE VII.

Applications analytiques du Calcul différentiel..... 291
Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous des formes singulières..... 291

CHAPITRE VIII.

Développement des fonctions..... 299
Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable..... 299
Extension de cette formule aux fonctions de plusieurs variables. 313

CHAPITRE IX.

Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable..... 317
Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables..... 322

CHAPITRE X.

Applications géométriques du Calcul différentiel..... 330
Formules différentielles relatives aux tangentes et normales aux courbes planes..... 330

CHAPITRE XI.

Théorie des asymptotes..... 338
Des asymptotes considérées comme limite des tangentes..... 344

CHAPITRE XII.

Pages.

Différentielles et dérivées de l'arc, de l'aire et de l'inclinaison d'une courbe plane. Usage des dérivées pour reconnaître la concavité ou la convexité..... 354
Points singuliers..... 357

CHAPITRE XIII.

Expression différentielle du rayon de courbure. Courbes osculatrices en général. Contacts de divers ordres..... 363

CHAPITRE XIV.

Théorie analytique des développées. Courbes enveloppes..... 372

CHAPITRE XV.

Tangentes et plans normaux aux courbes à double courbure. Plans tangents et normales aux surfaces courbes..... 383
Sur la distance des droites successives d'un système continu... 390

CHAPITRE XVI.

Plan osculateur d'une courbe. Cercle osculateur. Angle de contingence. Angle de torsion. Surface polaire. Centre de la sphère osculatrice. Contacts des courbes à double courbure. Développées de ces courbes. Contacts des surfaces..... 395

NOTE I.

Sur les expressions imaginaires. Comment on les introduit dans les données du calcul..... 423

NOTE II.

Décomposition des fractions rationnelles..... 438

NOTE III.

Pages.
Règles de convergence des séries..... 445

NOTE IV.

Des produits de facteurs en nombre infini..... 469

APPENDICE.

Note sur les fonctions d'une variable imaginaire; par M. J. Bertrand. 482

PLANCHES I, II, III, IV, V, VI.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

AVERTISSEMENT

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

On a plus d'une fois exprimé le regret qu'un Livre aussi justement classique, et non moins utile aux maîtres qu'aux élèves, laissât complétement de côté plusieurs chapitres importants, imposés aujourd'hui par les progrès de la Science dans l'enseignement de nos écoles. Il est devenu impossible, par exemple, dans un cours d'Analyse infinitésimale, de ne pas introduire les éléments au moins de la théorie des fonctions elliptiques et les principes généraux relatifs aux fonctions d'une variable imaginaire.

Préoccupé, dans les dernières années de sa vie, d'études et de méditations d'un tout autre ordre, M. Duhamel, à qui cette lacune a souvent été signalée, n'a pu trouver le loisir de la combler, et ses papiers ne contiennent aucune étude sur cette partie de la Science. Sans prétendre ici suppléer aux pages excellentes et profondes qu'il aurait pu ajouter à son Livre,

nous avons espéré qu'on trouverait avec plaisir l'exposition des principes aujourd'hui élémentaires et classiques dans l'enseignement du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

Les Notes que l'on trouve à la fin du tome Ier et du tome II sont extraites, avec de légères modifications, de mon *Traité de Calcul différentiel et intégral;* leur lecture sera facile, je l'espère, à ceux qui auront lu et compris le Livre de M. Duhamel.

J. BERTRAND.

PRÉFACE

DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

La marche suivie dans la première Partie de cet Ouvrage est fort différente de celle qu'ont adoptée les divers auteurs qui ont écrit sur le même sujet. Elle ne se rapporte précisément à aucun enseignement existant, mais à l'enseignement tel que je crois qu'il doit être.

L'ordre suivant lequel les diverses parties d'une science doivent être présentées, du moins quant à ce qu'elles ont de général et de caractéristique, est presque toujours l'ordre même suivant lequel elles ont été découvertes. Les conceptions importantes ne sont point dues au hasard : elles se présentent aux hommes éminents de chaque époque lorsqu'elles sont naturellement amenées par les besoins et l'état de la science, et il est convenable de leur donner dans l'enseignement de cette science la place qu'elles ont occupée dans son développement naturel.

La notion des infiniment petits remonte à Archimède; elle s'est présentée d'elle-même dans la mesure des grandeurs géométriques, aussitôt qu'on a voulu considérer les aires de courbes différentes du cercle, ou les volumes de corps terminés par des surfaces courbes autres que celles du cylindre, du cône et de la sphère.

Déjà pour la comparaison des volumes de ces derniers corps, ainsi que pour la mesure du cercle, on avait été amené à la conception fondamentale des limites. Ainsi les deux idées générales les plus fécondes des sciences mathématiques remontent presque jusqu'à leur berceau, et doivent, par conséquent, se présenter presque au début de leur enseignement.

L'objet principal de cet Ouvrage est le développement de ces deux conceptions, qui sont intimement liées l'une à l'autre. Les questions que nous y traitons font partie de diverses branches des Mathématiques pures ou appliquées, et se trouveraient autrement disposées dans un enseignement complet de toutes ces branches. Ce sont des extraits que nous en faisons, pour faire comprendre l'esprit des méthodes que nous voulons exposer; mais nous croyons que ces méthodes doivent être introduites dans chaque branche particulière, à mesure que le besoin s'en fait sentir. Nous espérons même le faire un jour si le temps nous permet de réaliser le projet, conçu depuis bien des années, d'esquisser des éléments de Mathématiques pures et appliquées. En attendant, nous avons constamment cherché à répandre par notre enseignement toutes les améliorations que nous avons cru pouvoir apporter aux idées générales et aux méthodes scientifiques; et nous avons eu souvent la satisfaction de voir, soit par les ouvrages, soit par l'enseignement oral de nos élèves, que nos efforts n'avaient pas été tout à fait sans résultat. Mais il est nécessaire qu'un cours complet d'éléments soit conçu et exécuté par un seul, et nous espérons qu'un jour nous pourrons en présenter au

moins un programme développé. Voici maintenant la marche que nous avons cru devoir suivre dans l'Ouvrage que nous faisons paraître aujourd'hui, et dont l'objet est l'enseignement des méthodes infinitésimales.

Nous avons commencé par donner une idée générale de la méthode des limites, et nous avons fait remarquer en quoi elle était plus simple que celle qu'employaient les anciens géomètres, en partant de la même notion des limites, qui leur était très-familière. Nous avons distingué ensuite les différentes manières dont les grandeurs à mesurer, ou celles auxquelles on les ramène, pouvaient être considérées comme limites de variables d'une espèce plus simple, et nous avons dit qu'elles pouvaient en général se réduire à trois. La première, employée dans quelques cas par Euclide et Archimède, consiste à regarder les grandeurs comme limites de séries; la deuxième, due à Archimède, comme limites de sommes des quantités infiniment petites; la troisième comme limites de rapports d'infiniment petits. Les deux premières se sont présentées à propos de la mesure de la pyramide, de la parabole, de la spirale, de la sphère, des volumes des corps engendrés par la révolution de sections coniques, etc. La troisième, due aux modernes, s'est présentée à l'occasion du problème des tangentes, et s'applique à beaucoup d'autres questions. La théorie des séries étant en dehors de l'objet de cet Ouvrage, nous avons dû nous borner à considérer les quantités comme limites de sommes ou de rapports d'infiniment petits, ou comme dépendant d'une manière quelconque de ces limites.

Nous avons cru devoir, contrairement aux précé-

dents, commencer l'étude du Calcul infinitésimal par la considération des limites de sommes : non-seulement parce que c'est l'ordre que la science a suivi dans sa formation, mais parce que la mesure des grandeurs doit naturellement précéder la recherche des tangentes aux courbes, et qu'en cela l'esprit humain a procédé comme la nature des choses le demandait. Il nous a semblé que renverser cet ordre n'était pas un moyen de rendre la science plus claire et plus accessible.

En conséquence, nous nous sommes occupé d'abord de la mesure des aires des figures planes terminées par des courbes, ainsi que des volumes et des surfaces des corps qui ne sont pas terminés de toute part par des plans. Nous ne nous sommes pas borné à montrer comment des questions se ramenaient à des recherches de limites de sommes d'infiniment petits; mais nous avons fait voir, par un grand nombre d'exemples, comment ces calculs pouvaient être exécutés par des procédés variés, qui ont même quelquefois une assez grande généralité.

Nous avons ainsi fait connaître quelques-unes des méthodes employées par les géomètres qui ont traité les premiers ces sortes de questions. Les procédés que donnera plus tard le Calcul intégral n'en seront que mieux appréciés; mais, dans tous les cas, il nous a paru qu'il n'était pas convenable de former toute la science du calcul, avant d'avoir résolu les premières questions à l'occasion desquelles elle a été faite.

Nous n'avons pas choisi tous nos exemples dans la Géométrie; la Statique nous en a offert quelques-uns.

Nous avons fait voir généralement comment la détermination des centres de gravité se ramène à celle de limites de sommes, et nous avons effectué les calculs dans un certain nombre de cas simples

Dans toutes ces recherches, on fait un fréquent usage d'un principe général très-simple, qui consiste en ce que la limite d'une somme d'infiniment petits n'est pas changée quand on altère ses éléments de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes; ou, en d'autres termes, quand on remplace ces éléments par d'autres dont les rapports avec les premiers ont respectivement pour limite l'unité. Le principe fondamental que nous établissons en commençant est la source des plus grands avantages que présente l'introduction des infiniment petits : il permet d'en retrancher la partie qui rend le calcul difficile, en donnant un moyen sûr de reconnaître si cette simplification ne conduit à aucune erreur. Par ce moyen, on a toutes les simplifications qu'on trouverait dans une approximation, et en même temps l'exactitude que l'on n'obtiendrait que par de longs et pénibles calculs.

Nous sommes passé ensuite à la considération des limites de rapports d'infiniment petits; le principe précédent s'y applique encore, et les limites ne sont pas changées quand on altère les termes variables des rapports, de quantités infiniment petites par rapport à ces termes : d'où résulte encore l'avantage de se débarrasser des parties qui font souvent la plus grande difficulté de la question.

Nous avons commencé par faire voir que, dans les divers systèmes de détermination des points d'un lieu,

le problème des tangentes se ramène immédiatement à celui de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites. Ces quantités sont les accroissements correspondants des deux variables dont les valeurs déterminent les divers points de la courbe; de sorte que le problème général des tangentes revient à ce problème d'Analyse : *Étant donnée une équation entre deux variables, trouver la limite du rapport des accroissements infiniment petits, correspondants de ces variables.*

On voit ainsi l'intérêt géométrique qu'offre ce problème de calcul, et l'on est naturellement conduit à en chercher la solution générale; mais nous montrons qu'il s'appliquera encore à beaucoup d'autres questions intéressantes dans la Géométrie et la Mécanique. La nature de ces questions peut varier à l'infini. Nous en avons choisi particulièrement quelques-unes, à cause de leur importance dans la science. En Géométrie, nous avons considéré la courbure des lignes planes, le cercle osculateur, les développées, etc.; en Mécanique, la vitesse, l'accélération, le poids spécifique en un point d'une substance non homogène, etc. Nous avons étudié aussi la question générale du déplacement d'une figure sur un plan, et nous avons vu comment se résolvent les problèmes de tangentes auxquels elle donne lieu.

Toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'ici se ramenant à des limites de sommes ou de rapports, nous avons cru convenable de les exposer et d'en faire des applications particulières avant d'établir les règles du Calcul différentiel et du Calcul intégral, qui donnent plus de simplicité et de généralité à l'exécution de tous

les calculs auxquels elles se ramènent. Comme elles sont en elles-mêmes indépendantes des moyens d'exécution des opérations qu'elles indiquent, nous avons cru devoir les présenter avant les longues et pénibles théories d'Analyse, qui donnent les meilleures règles pour cette exécution. En suivant la marche inverse, on rebute l'esprit par des recherches abstraites dont il ne voit pas l'objet, et il est même à craindre que les théories géométriques que l'on expose ensuite ne soient prises pour des dépendances des théories analytiques, avec lesquelles elles n'ont en elles-mêmes rien de commun, et qui ne leur servent qu'à l'exécution du calcul des limites de sommes ou de rapports, auxquelles elles ont ramené l'objet de leur recherche.

Telle est la marche que nous avons suivie dans le premier Livre de cet Ouvrage.

Dans les Livres suivants, nous donnons les règles pour trouver les limites des rapports des accroissements infiniment petits de variables liées par des équations données, ainsi que les limites des sommes d'infiniment petits, représentés par une formule générale.

Nous donnons à ces deux problèmes d'Analyse, dont l'un est l'inverse de l'autre, toute l'extension dont ils sont susceptibles, en restant dans le cadre qui convient à de simples éléments, et nous formons ainsi ce que l'on appelle le Calcul différentiel et intégral.

Ainsi, dans cet essai, que nous espérons rendre un jour moins imparfait, notre objet a été l'étude de la méthode infinitésimale considérée en elle-même; et les procédés si importants du Calcul différentiel et du Calcul inverse ont été les moyens d'exécution des opé-

rations auxquelles cette méthode a ramené la solution des questions qu'elle s'est proposées. Cette subordination, que nous avons tenu à rendre bien explicite et bien sensible, donne la raison de l'ordre que nous avons suivi dans cet Ouvrage, et du titre que nous lui avons donné.

DUHAMEL.

ÉLÉMENTS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

LIVRE PREMIER.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA MESURE DES GRANDEURS, ET DES NOMBRES EN GÉNÉRAL.

1. L'évaluation des grandeurs d'une espèce quelconque est fondée sur deux notions nécessaires et suffisantes : celle de l'égalité, et celle de l'addition.

De ces notions résulte immédiatement celle de la décomposition d'une grandeur en parties égales. Lorsqu'on les a acquises on peut comparer entre elles les grandeurs de cette espèce, et en en choisissant une pour terme de comparaison, on pourra déterminer toutes les autres, comme nous allons le faire voir.

Le cas le plus simple de la comparaison d'une grandeur à une autre est celui où la première peut être décomposée exactement en parties égales à la seconde. Le résultat de la comparaison, ou le rapport de la première à la seconde,

n'est alors autre chose qu'une *pluralité,* ou ce qu'on appelle *un nombre.*

Mais, si la première partie n'était pas exactement décomposable en parties égales à la seconde, le résultat de la comparaison ne serait plus une simple *pluralité,* ou ce que nous avons appelé un *nombre.* Néanmoins, comme il est très-utile dans les sciences de généraliser le plus possible, c'est-à-dire de renfermer le plus grand nombre possible d'idées particulières sous une même dénomination, on a cherché quelle extension il faudrait donner à la signification du mot *nombre* pour qu'il exprimât dans tous les cas le rapport de deux grandeurs de même espèce.

On a d'abord considéré le cas où les deux grandeurs ont une mesure commune. Pour fixer les idées, supposons que cette mesure soit contenue m fois dans l'une et n fois dans l'autre : alors la première est égale à m fois la $n^{ième}$ partie de la seconde, et celle-ci à n fois la $m^{ième}$ partie de la première ; on est convenu de dire que le rapport de la première à la seconde est m $n^{ièmes}$, et on l'écrit ainsi, $\frac{m}{n}$. Le rapport de la seconde à la première est dit *réciproque* ou *inverse* du premier et s'écrira $\frac{n}{m}$.

Ces nouveaux rapports ont encore été appelés des nombres ; et pour les distinguer des nombres entiers, on les a désignés sous le nom de *nombres fractionnaires.*

Sous quelque forme qu'ils se présentent, on dit que deux nombres sont égaux lorsqu'en prenant une même unité ils représentent des grandeurs égales.

Si l'une des grandeurs représentées est égale à l'autre augmentée ou diminuée d'une certaine quantité, on dit que le nombre correspondant est plus grand ou plus petit que l'autre ; et l'on dit qu'on ajoute plusieurs nombres quelconques, quand on considère celui qui correspondrait à la

somme des quantités qui, comparées à une même unité, ont donné lieu aux premiers.

Enfin, si l'on considère deux grandeurs qui n'aient pas de mesure commune, et que l'on appelle à cause de cela *incommensurables,* elles ne présentent aucune des deux idées précédentes, et il faudra, ou dire qu'elles n'ont pas de rapport, ou donner à la signification du mot *nombre* une nouvelle extension. Mais il ne suffira pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport, et que ce rapport sera désigné sous le nom de *nombre incommensurable,* il faudra définir rigoureusement l'égalité des *rapports* ou *nombres incommensurables.* Notre manière de voir à cet égard, différente de celle de quelques Géomètres, est entièrement conforme au fond à celle d'Euclide.

Observons d'abord qu'en partageant l'une des grandeurs en parties égales suffisamment petites, et les portant dans l'autre autant de fois que possible, le reste sera moindre que l'une des parties, et, par conséquent, pourra toujours être rendu moindre que toute grandeur donnée; de sorte qu'il existera un rapport commensurable entre l'une quelconque des deux grandeurs et une autre qui différera aussi peu qu'on voudra de la seconde.

Cela posé, considérons deux grandeurs incommensurables; divisons l'une d'elles, par exemple la plus petite, en parties égales dont le nombre croisse indéfiniment; portons-les dans la plus grande et négligeons le reste : il en résultera une suite de rapports ou de nombres commensurables correspondant à la plus petite des grandeurs et à d'autres grandeurs commensurables avec elle, et qui diffèrent de la seconde de quantités qui peuvent devenir moindres que toute grandeur désignée. Concevons, en second lieu, deux autres grandeurs incommensurables, de même nature l'une que l'autre, mais d'une espèce quelconque, et parta-

geons successivement la plus petite dans le même nombre de parties égales que la plus petite de la première espèce : on aura de même une nouvelle suite de rapports commensurables; et si ceux qui correspondent de part et d'autre au même mode de division de la plus petite sont toujours égaux, quelque loin qu'on pousse cette division, on dit que les deux premières grandeurs incommensurables ont même rapport ou même *raison* que les deux autres.

2. Mais pour qu'il y ait lieu de définir ainsi l'égalité des rapports incommensurables, il est nécessaire de démontrer que l'égalité des rapports commensurables respectifs est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment; c'est-à-dire que si cette égalité a lieu pour une certaine loi, elle aura lieu pour toute autre. Cette proposition peut être démontrée comme il suit :

Soient A et B deux grandeurs incommensurables d'une espèce quelconque, et A′, B′ deux autres grandeurs incommensurables, soit de la même espèce que les premières, soit de tout autre; admettons que si l'on subdivise A et A′ en un même nombre de parties égales, qui croissent indéfiniment suivant une certaine loi déterminée, on trouve constamment le même nombre de ces parties contenues respectivement dans B et B′ : il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A′ en un même nombre quelconque m de parties égales, non renfermé dans la loi donnée, il se trouvera toujours un nombre égal de ces subdivisions respectives dans B et B′.

En effet, supposons qu'il y ait un nombre k de parties dans B et un nombre différent, par exemple plus grand, dans B′. Alors $k+1$ parties de la première espèce surpasseront B d'une certaine quantité que je désignerai par E; tandis que $k+1$ parties de la seconde seront encore inférieures à B′. Cela posé, décomposons A en parties égales

moindres que E, et comprises dans la loi donnée; décomposons A′ en un nombre égal de parties : d'après l'hypothèse, il devra s'en trouver respectivement le même nombre dans B et dans B′. Mais il est évident qu'il y aura moins de parties plus petites que E dans B que dans B + E ou dans $k + 1$ des subdivisions en question; et il y en aura évidemment autant dans ces $k + 1$ subdivisions qu'il y aura de parties correspondantes dans les $k + 1$ subdivisions correspondantes de B′, qui donnent cependant une somme inférieure à B′. Donc il y aurait dans B un nombre moindre de parties comprises dans la loi donnée, qu'il n'y aurait de leurs correspondantes dans B′; ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc impossible qu'en partageant A et A′ en un même nombre quelconque de parties égales, ces parties ne soient pas respectivement comprises dans B et B′ le même nombre entier de fois.

La définition de l'inégalité des rapports incommensurables sera la même que pour les rapports commensurables. On dira toujours qu'un rapport est plus grand ou plus petit qu'un autre lorsqu'il est celui d'une quantité plus grande ou plus petite que la première, à la même seconde quantité. Et l'on appellera toujours *somme* des rapports de plusieurs quantités quelconques à une même unité le rapport de la somme de ces quantités à la même unité.

3. C'est au moyen de cette extension qu'Euclide a pu établir des théorèmes généraux dans la comparaison des surfaces entre elles et des solides entre eux. Il n'aurait pas pu dire que deux rectangles de même hauteur sont toujours dans le même rapport que leurs bases, ni que deux parallélépipèdes de même base sont dans le même rapport que leurs hauteurs; et tant d'autres propositions analogues n'auraient pu être énoncées généralement, s'il n'avait défini préalablement, non les rapports, mais l'*égalité* des rapports, dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Ce n'est pas que pour les besoins de la pratique il y ait beaucoup d'intérêt à donner ce degré de généralité aux théorèmes relatifs à la comparaison, et, par conséquent, à la mesure des grandeurs; car on peut toujours les rendre commensurables entre elles en les augmentant ou les diminuant de quantités moindres que toute grandeur désignée. Mais, au point de vue de la théorie pure, il faudrait dire que les propositions ne sont pas générales et n'ont de sens que quand toutes les grandeurs ont une mesure commune.

CHAPITRE II.

DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL, ET DE LA CONTINUITÉ.

4. On désigne sous le nom de *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, est susceptible de recevoir successivement différentes valeurs. On nomme *indépendantes* celles dont les valeurs sont entièrement arbitraires, et *dépendantes* ou *fonctions* celles dont les valeurs sont déterminées par celles de certaines autres quantités, quelle que soit la nature de cette dépendance, et soit qu'il s'agisse de quantités concrètes ou de quantités évaluées en nombre. Dans le premier cas, on a des *fonctions concrètes,* et dans le second, des *fonctions analytiques.*

Les fonctions analytiques se distinguent en fonctions *explicites* et fonctions *implicites.* Les premières sont celles dont les valeurs peuvent s'obtenir au moyen d'opérations indiquées que l'on sait exécuter ; les autres sont celles qui sont liées aux variables indépendantes par des équations non résolues. Dans ce cas, les opérations à effectuer pour former les valeurs des fonctions ne sont pas indiquées. On les connaîtrait par la résolution des équations, si on pouvait l'effectuer ; et alors ces fonctions deviendraient explicites.

Les fonctions explicites se subdivisent ordinairement en *algébriques* et *transcendantes.* Les premières sont celles où les seules opérations indiquées sont des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévation à des puissances et extractions de racines de degrés connus ; les autres sont celles qui renferment d'autres opérations indiquées sur

les variables; comme, par exemple, les quantités exponentielles, les logarithmes, les lignes trigonométriques, etc.

Lorsqu'une seule de ces diverses opérations est indiquée sur une variable, on a une fonction *simple* de cette variable. Lorsque plusieurs d'entre elles sont accumulées les unes sur les autres, on a ce que l'on appelle une *fonction de fonctions*. Toutes les fonctions qui ne rentrent pas dans ces deux cas se nomment *fonctions composées*.

Lorsque deux variables sont liées par une équation quelconque, elles sont fonctions l'une de l'autre. La forme de ces deux fonctions est différente si les deux variables n'entrent pas dans l'équation d'une manière symétrique. On leur donne, l'une par rapport à l'autre, le nom de *fonctions inverses*. Si, par exemple, on résout par rapport à x les équations suivantes, qui sont résolues par rapport à y,

$$y = x^m, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots,$$

on obtient

$$x = \sqrt[m]{y}, \quad x = \log y, \quad x = \operatorname{arc}\sin y.$$

Ainsi, d'après notre définition, la racine $m^{ième}$ est la fonction inverse de la puissance m; le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle, etc.

Continuité.

5. Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Une fonction est dite *continue* lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend elle varie elle-même d'une manière continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les intermédiaires. Une fonction peut être continue tant que les variables dont elle dépend restent renfermées

entre certaines limites, et cesser de l'être, ou devenir discontinue, en dehors de ces limites.

Pour démontrer qu'une fonction qui est réelle entre certaines limites de la variable est continue, il suffit de faire voir que l'on peut faire croître la variable par degrés assez petits pour que les accroissements correspondants de la fonction soient moindres qu'une grandeur quelconque : car, si cette fonction n'était pas continue, il faudrait qu'elle passât brusquement d'une certaine valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie ; ce qui est absurde, puisque l'accroissement de la fonction peut être rendu moindre que toute grandeur donnée. C'est ainsi que, dans les éléments, on a démontré que toutes les fonctions simples sont continues et que, par conséquent, il en est de même des fonctions composées. Réciproquement, toute fonction continue d'une variable jouit de la propriété que ses accroissements peuvent devenir moindres que toute quantité donnée, pourvu que l'on donne des valeurs suffisamment petites aux accroissements de la variable : car, si l'accroissement donné à la variable, à partir d'une de ses valeurs, tendait vers zéro, sans qu'il en fût ainsi de l'accroissement de la fonction, il en résulterait que la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, et que, par conséquent, elle ne serait pas continue.

Si l'on considère les valeurs d'une fonction continue comme des ordonnées et les valeurs correspondantes de la variable indépendante comme des abscisses, les points ainsi obtenus se suivront sans interruption et formeront une ligne continue, qui sera la représentation géométrique de la fonction analytique.

6. *Réciprocité.* — Si $F(x)$ désigne une fonction continue relativement à x, réciproquement x sera une fonction con-

tinue de $F(x)$; c'est-à-dire que, si cette dernière varie d'une manière continue, les valeurs correspondantes de x se suivront d'une manière continue.

En effet, les valeurs successives de $F(x)$ correspondant à des valeurs successives de x, réciproquement, ces dernières correspondent aux premières; mais, par hypothèse, celles-ci se suivent d'une manière continue lorsque les valeurs de x varient d'une manière continue. Il en est donc de même de ces dernières lorsqu'on fait varier leurs correspondantes, c'est-à-dire les valeurs de $F(x)$, d'une manière continue.

7. *Continuité des fonctions implicites.* — Si deux variables sont liées par une équation dont les deux membres sont des fonctions continues de l'une et de l'autre, chacune de ces variables sera une fonction continue de l'autre.

Soient, en effet, x, y, ces variables, et $F(x, y) = 0$ l'équation qui les lie, F désignant une fonction continue, soit par rapport à x, soit par rapport à y. D'après tout ce qui a été établi précédemment, si x varie d'une très-petite quantité, il en sera de même de $F(x, y)$; et, pour ramener cette dernière à sa valeur primitive zéro, il faudra que y varie aussi d'une quantité extrêmement petite; donc, si x varie d'une manière continue, il en sera de même de y, c'est-à-dire de la fonction implicite qui en dépend par une équation dont les membres sont des fonctions explicites de l'une et de l'autre.

CHAPITRE III.

PREMIÈRE CONCEPTION DES LIMITES. MÉTHODE GÉNÉRALE.

8. Les anciens Géomètres, partant de la définition de l'égalité des quantités géométriques, fondée sur la superposition, et de la notion de l'addition de ces quantités, sont parvenus facilement à la comparaison et à la mesure des polygones plans, des parallélépipèdes et des prismes quelconques; mais quand ils voulurent comparer des figures planes terminées par des courbes, ou des solides terminés par des surfaces courbes, les mêmes procédés ne pouvaient plus réussir.

Ils eurent alors l'idée assez naturelle, mais fondamentale, de considérer, au lieu des grandeurs elles-mêmes, d'autres grandeurs de l'espèce de celles qu'ils savaient mesurer et telles, qu'elles pussent différer des premières de quantités moindres que toute quantité désignée. Ils cherchaient ensuite la relation entre ces grandeurs voisines des proposées, et dont ils rendaient la comparaison aussi facile que la question le permettait. Cette relation leur faisait aisément juger celle qui devait avoir lieu entre les grandeurs proposées; et ils démontraient cette dernière en prouvant, par la méthode pénible de la *réduction à l'absurde,* que la véritable relation ne pouvait en différer.

C'est dans les *Éléments* d'Euclide que l'on trouve les premières traces de cette importante méthode; il l'applique à la comparaison des cercles entre eux, des pyramides entre elles et d'autres encore.

Archimède l'a appliquée ensuite à la quadrature du segment parabolique; mais il s'est élevé à une conception beaucoup plus féconde, dont nous parlerons bientôt, dans la manière de composer les grandeurs variables qui peuvent différer aussi peu qu'on voudra des proposées.

Avant d'entrer dans aucun détail à cet égard, nous exposerons les principes au moyen desquels les modernes sont parvenus à simplifier les démonstrations des anciens, sans leur faire rien perdre de leur rigueur.

Limite d'une variable.

9. Lorsqu'une grandeur variable prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et *rester* moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessous, ou toujours au-dessus, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite*.

Lorsque cette limite est zéro, on donne à la variable le nom de quantité *infiniment petite,* ou simplement d'*infiniment petit*.

Remarque. — Il ne faut pas oublier que, pour que la quantité fixe soit limite de la variable, il faut non-seulement que leur différence devienne moindre que toute quantité défigurée, mais qu'elle reste telle dans les variations qu'elle subira ensuite indéfiniment. Si cette différence, après être devenue inférieure à la quantité désignée, devenait ensuite plus grande, puis plus petite, ensuite plus grande et de même indéfiniment, la quantité fixe n'offrirait

pas le caractère que nous attachons à une limite, et nous ne lui donnerions pas ce nom.

Principe fondamental des limites.

10. *Si deux quantités variables sont constamment égales et tendent chacune vers une limite, ces deux limites sont nécessairement égales.* — En effet, deux grandeurs toujours égales ne présentent qu'une seule valeur, et il semble inutile de démontrer qu'une valeur variable ne peut pas tendre à la fois vers deux limites inégales, c'est-à-dire vers deux grandeurs constantes, différentes l'une de l'autre.

Il est, au reste, bien facile d'ajouter quelques développements qui rendent plus claire encore, s'il est possible, cette importante proposition. Supposons, en effet, que deux variables toujours égales aient des limites différentes A et B, A étant, par exemple, la plus grande, et surpassant B d'une quantité déterminée Δ. La première variable, ayant A pour limite, finira par rester constamment comprise entre deux valeurs, l'une plus grande, l'autre plus petite que A, et ayant avec A une différence aussi petite qu'on voudra; bornons-nous à supposer cette différence moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Semblablement la seconde variable finira par rester indéfiniment à une distance de B moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Or il est évident qu'alors les deux variables ne pourraient plus être égales; ce qui doit être cependant, d'après les données de la question. Ces données sont donc incompatibles avec l'existence d'une différence quelconque entre les limites des variables. Donc ces limites sont égales.

Méthode des limites.

11. Quand on veut trouver une relation entre des grandeurs qui ne se prêtent pas facilement aux comparaisons, on peut les considérer comme limites de grandeurs d'une espèce plus simple, et profiter de l'indétermination que cette condition laisse subsister, pour choisir ces variables de manière à faciliter la recherche d'une relation entre elles. Si l'on y peut parvenir, le problème est résolu.

En effet, cette relation peut toujours être considérée comme exprimée par une équation dont les deux membres seront des fonctions de ces variables. Ces dernières ne sont point assujetties à la continuité, mais les deux membres de l'équation seront ce que nous avons appelé des fonctions continues de ces variables, au moins dans le voisinage de leurs limites.

Soient a, b, c,... les quantités entre lesquelles on cherche une relation ; x, y, z,... les variables dont elles sont les limites ; et supposons qu'on ait trouvé entre elles l'équation

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots),$$

F et f désignant des fonctions continues de x, y, z,... au moins lorsque ces variables sont dans le voisinage de leurs limites respectives a, b, c,.... Il résulte de là que les différences de ces variables à leurs limites peuvent être assez petites pour que les fonctions $F(x, y, z, \ldots)$ et $f(x, y, z, \ldots)$ diffèrent aussi peu qu'on voudra de $F(a, b, c, \ldots)$ et $f(a, b, c, \ldots)$. Ces deux expressions constantes sont donc les limites vers lesquelles tendent les deux membres de l'équation. Mais les limites de quantités égales sont égales : donc on aura nécessairement

$$F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots),$$

c'est-à-dire que la relation entre les limites sera identiquement la même que celle qui avait lieu constamment entre les variables, et qu'il suffit de changer dans celle-ci les variables dans leurs limites pour avoir la relation qui existe entre ces dernières.

Si cette substitution introduisait des indéterminations apparentes, on les ferait disparaître par des procédés que nous aurons occasion de faire connaître par la suite.

On voit donc que la méthode des limites consiste à considérer des quantités dont on veut découvrir la relation, comme limites de quantités plus simples, et à chercher la relation de ces dernières. Lorsqu'elle est établie, il ne reste plus, d'après le théorème précédent, qu'à substituer à toutes les variables leurs limites respectives.

Les quantités variables qui ont pour limites les quantités proposées peuvent être choisies de bien des manières différentes, comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire, et ce choix est très-important. Les calculs peuvent être très-simples ou très-compliqués, suivant la nature de ces variables, et dans chaque cas particulier il faudra s'attacher d'abord à reconnaître quelles sont celles qui donneront le plus de facilité au calcul. Ainsi, par exemple, quand on cherche la relation entre les surfaces de deux cercles et leurs rayons, on considère ces cercles comme limites de polygones réguliers semblables, parce que la relation entre ces polygones et les rayons des cercles est très-facile à obtenir; tandis qu'elle aurait été très-difficile à découvrir si l'on avait supposé différents les nombres des côtés des deux polygones, et que de plus on ne les eût pas supposés réguliers. Au reste, si cette dernière était découverte, elle conduirait nécessairement à la même relation entre les cercles et leurs rayons, et le choix des variables n'a d'autre effet que de conduire plus ou moins simplement au résultat. Mais il n'y a aucune règle précise à donner à ce sujet.

Il peut arriver que les deux membres de l'égalité, quoique composés de quantités variables, restent constants; on aura toujours la relation entre les quantités proposées, en remplaçant les variables par leurs limites. On remarquera seulement que cette substitution, au lieu de donner les limites des deux membres, donne leur valeur constante. Au reste, on aurait facilement deux membres variables, en faisant passer l'un des termes variables d'un membre dans l'autre, ou encore en multipliant par un dénominateur variable; mais ce serait une transformation inutile, et que, par conséquent, il ne faut jamais faire.

Avant de passer à l'étude un peu approfondie des différentes manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites d'autres, d'espèce plus simple, nous croyons utile de donner de courtes explications au sujet de quelques définitions dépendantes de la considération des limites.

CHAPITRE IV.

RÉFLEXIONS AU SUJET DE QUELQUES DÉFINITIONS.

De l'infini.

12. Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence de limites, de bornes quelconques : c'est ainsi que l'espace et le temps sont dits infinis. Cette idée exclut évidemment celle de toute comparaison sous le rapport de la grandeur. Néanmoins, pour abréger le discours, on parle souvent de quantités infinies ; on les soumet aux mêmes opérations que les quantités finies, et il est très-important de ne pas se méprendre sur la manière dont ce langage doit être entendu.

Ces quantités dites *infinies* ne peuvent se présenter que de deux manières : ou comme solutions, ou comme données d'une question.

L'infini peut se présenter comme solution lorsque, pour déterminer certaines quantités, on les regarde comme dépendantes d'une autre, et que, dans le cas particulier que l'on a en vue, cette dernière n'existe plus ; tandis que pour des cas très-voisins elle aurait des valeurs qui pourraient dépasser toute grandeur assignée. Ainsi, par exemple, pour déterminer un angle, on peut, en général, prendre pour inconnue sa tangente trigonométrique ; mais il faut excepter le cas particulier de l'angle droit. Les équations qui donneront la valeur de cette tangente devront conduire à une expression qui croîtra indéfiniment, à mesure que les données se rapprocheront de celles qui conduiraient pour solution à l'angle droit. Dans ce dernier cas, l'expression ne doit plus

rien représenter, et apprendra par cela même que la question se rapporte à ce cas particulier. La forme qu'elle prendra le plus ordinairement sera celle d'un nombre fini, divisé par zéro. On dit alors que la valeur de l'inconnue est infinie et que l'angle correspondant est droit; de sorte que la question proposée est possible, et sa solution est déterminée. Mais si la quantité dont la valeur générale se présente dans un cas particulier sous la forme illusoire d'un nombre divisé par zéro n'est pas une inconnue auxiliaire, mais bien celle que l'on voulait déterminer, il est clair que la question proposée était impossible.

13. L'infini peut encore se présenter autrement que comme solution d'équations dans des cas particuliers; il peut se trouver dans les données mêmes de la question. On peut se proposer de trouver la limite du rapport, de la différence, ou de toute autre fonction de quantités dépendant les unes des autres et croissant sans limites. Dans ces divers cas, on dit quelquefois que cette limite est le rapport, ou la différence, ou la fonction quelconque de ces quantités infinies; mais il n'y aurait aucun sens à attribuer à la comparaison des deux infinis, puisque, comme je l'ai déjà dit, l'infini ne signifie pas une grandeur, mais l'absence de limites : ainsi, si l'on mène dans un plan des parallèles équidistantes, il est absurde de dire que les espaces infinis renfermés entre les parallèles consécutives sont égaux. Mais si l'on cherche les rapports de ces espaces croissant indéfiniment, on peut bien se demander quelles sont leurs limites, et l'on trouve alors un résultat complétement indéterminé; car on peut faire croître indéfiniment les longueurs de deux de ces bandes en établissant entre elles une relation arbitraire; et l'on ne trouverait le rapport de ces *bandes infinies* égal à l'unité que dans des cas très-particuliers.

Ce même langage vicieux est souvent employé quand on

veut désigner les limites vers lesquelles tendent des grandeurs variables, lorsque certaines autres grandeurs, dont elles dépendent, croissent sans limite. Ainsi, par exemple, le cercle est la limite vers laquelle tend un polygone régulier inscrit, dont le nombre des côtés croît indéfiniment; et, pour exprimer cette propriété, on dit quelquefois que le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés. On dit encore qu'une droite en rencontre une autre à l'infini, au lieu de dire qu'elle est la limite d'une droite qui rencontre l'autre à une distance qui augmente sans limite.

Toutes ces manières de s'exprimer ont des inconvénients pour ceux dont les idées ne sont pas encore bien faites, et nous ne les emploierons jamais.

Des nombres incommensurables.

14. Lorsque nous avons donné la définition, non pas des rapports incommensurables, mais de l'égalité de rapports de quantités incommensurables entre elles, nous avons fait remarquer que ce n'était que par une extension donnée au mot nombre que l'on pouvait dire que ces quantités ont un rapport qui est un nombre. Il n'y avait donc pas lieu de dire qu'on pouvait approcher indéfiniment du rapport de deux quantités incommensurables, au moyen de rapports commensurables, ni, par suite, de regarder les nombres incommensurables comme limites des nombres commensurables et d'y appliquer les principes relatifs aux limites.

Mais, après avoir fait l'extension du sens du mot nombre, et avoir défini avec précision l'égalité et l'inégalité des nombres incommensurables, ainsi que le sens du mot limite, il est facile de reconnaître que le rapport de deux quantités incommensurables est bien la limite de nombres commensurables variables. En effet, nous avons vu qu'on pouvait approcher indéfiniment de la première quantité, au moyen

de quantités commensurables avec la seconde, plus grandes ou plus petites que la première, dont elles diffèrent de moins que d'une subdivision de la seconde. Les rapports de ces variables à cette seconde sont commensurables et croissent ou décroissent avec les variables. De plus, pour avoir le rapport incommensurable lui-même, il faudrait, d'après la définition de la somme des nombres, ajouter ou retrancher au rapport variable celui du reste ou de l'excès à cette quantité constante. Ce dernier rapport, qui, d'après la définition de plus petit et plus grand, est inférieur à celui d'une subdivision qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, tend donc indéfiniment vers zéro. Donc, d'après le sens étendu donné à toutes les expressions, les nombres incommensurables sont limites de nombres commensurables, et tous les principes des limites y sont applicables.

15. Remarque. — On peut arriver à l'idée des nombres incommensurables autrement qu'en comparant deux grandeurs concrètes et qui n'ont pas de commune mesure, et par des considérations purement arithmétiques, comme, par exemple, celles des racines, des logarithmes, etc. Dans ces cas, on trouve des nombres commensurables qui satisfont à des conditions de plus en plus voisines des proposées, et qui, en prenant une unité de nature quelconque, représenteraient des quantités concrètes tendant vers des limites déterminées. On convient alors de dire que ces limites, incommensurables avec l'unité, ont avec elle des rapports que l'on appellera nombres incommensurables, et qui seront dits satisfaire aux conditions ou équations proposées.

Arrivant ainsi à la considération du rapport de deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure, on ajouterait les différents développements que nous avons donnés précédemment.

De l'équivalence.

16. La notion de l'équivalence paraît si naturelle et si simple, que les géomètres ont rarement senti la nécessité de la définir. Euclide ne fait aucune différence entre l'équivalence et l'égalité, il se sert du même mot pour désigner l'une et l'autre; il dit égaux deux triangles de même base et de même hauteur. Mais aujourd'hui que l'égalité en Géométrie se définit exclusivement par la coïncidence, il n'est plus permis de dire égales des figures qui ne peuvent coïncider; et lorsqu'on les appelle équivalentes, il faut dire sans équivoque ce qu'on entend par là, et qu'il n'y ait pas plus d'obscurité dans l'équivalence d'un cercle avec un carré que dans l'égalité de deux triangles.

Quelques auteurs, voulant faire la distinction des deux égalités, ont appelé la seconde *égalité en surface,* mais ils n'ont donné aucun caractère précis pour la reconnaître. Ils l'ont admise pour les figures résultant de la réunion ou de la soustraction de figures égales, ou pour les mêmes parties aliquotes d'une même figure conduisant à des figures non superposables. Ainsi, par exemple, on peut partager un parallélogramme en deux parties égales d'une infinité de manières, puisqu'il suffit de le couper par une ligne passant par le point de rencontre de ses diagonales. Toutes ces moitiés, de formes si diverses, sont dites équivalentes. Mais tous ces cas simples seraient insuffisants, et d'ailleurs auraient besoin d'être ramenés à un caractère commun qui servirait alors de définition à l'équivalence. Autrement, on pécherait contre le principe général que nous avons énoncé au commencement de cet Ouvrage, et qui consiste en ce que l'application des nombres à l'étude des grandeurs de toute espèce exige préalablement une définition précise de l'éga-

lité, c'est-à-dire des conditions sous lesquelles le rapport de deux grandeurs sera dit égal à l'unité.

Cela posé, nous dirons que deux quantités géométriques sont équivalentes lorsqu'elles seront *composées de parties égales, ou seront limites de quantités variables composées de parties respectivement égales.*

17. On peut remarquer que, si l'on conçoit les parties correspondantes de ces quantités évaluées par rapport à une même unité, on trouvera de part et d'autre les mêmes nombres et les mêmes sommes de nombres; de sorte que les quantités équivalentes seront exprimées par les mêmes nombres ou par les limites de nombres égaux. Mais cette propriété ne doit pas être choisie pour servir de définition; elle est immédiatement fondée sur la précédente, d'après le sens que nous avons attaché à l'égalité et à l'addition des nombres.

Les quantités équivalentes étant exprimées par des nombres égaux, toutes les opérations de soustraction, de division, etc., faites sur des quantités équivalentes donneront les quantités exprimées par des nombres égaux, et, par conséquent, équivalentes. Par exemple, de quelque manière qu'on partage un parallélogramme en deux parties égales, toutes ces figures non superposables sont équivalentes.

CHAPITRE V.

DES DIFFÉRENTES MANIÈRES DONT LES QUANTITÉS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE VARIABLES.

18. Les grandeurs peuvent être considérées comme dépendant de limites de variables de bien des manières différentes. Les formes de leurs expressions peuvent être aussi diverses que celles des questions mêmes dont elles sont les solutions.

Mais lorsqu'il s'agit seulement de ramener une quantité à d'autres plus faciles à traiter, et qu'on n'aperçoit pas immédiatement une quantité variable d'une espèce plus simple dont elle soit la limite, on emploie le plus ordinairement l'un des deux procédés suivants, qui ont été imaginés par les géomètres anciens et considérablement développés par les modernes.

Ces deux procédés ont cela de commun : qu'ils consistent l'un et l'autre à enlever successivement de la quantité proposée des quantités d'une espèce plus simple, en laissant un reste qui présente bien les mêmes difficultés que la quantité en question, mais qui diminue de plus en plus et a pour limite zéro. Par là on tend de plus en plus à épuiser la quantité, ce qui a fait donner à la méthode fondée sur ces procédés le nom de méthode d'*exhaustion*. Mais il y a deux manières très-différentes de procéder à l'épuisement de la quantité. Dans l'une on enlève d'abord une certaine quantité déterminée, et l'on ne s'occupe plus que de ce qui reste; puis on enlève de ce reste une nouvelle quantité déterminée, et l'on obtient un nouveau reste sur lequel on agit de même; et

ainsi de suite indéfiniment, de telle sorte que les restes puissent devenir moindres que toute quantité donnée. Cette propriété s'exprimerait dans notre langage en disant que la quantité est la limite d'une somme de quantités fixes dont le nombre augmente indéfiniment.

Le second procédé, dû à Archimède, consiste à considérer dans la grandeur des parties d'espèce plus simple, non pas fixes comme dans le premier, mais pouvant décroître chacune indéfiniment de telle sorte, que leur somme diffère de la grandeur en question d'une quantité qui puisse devenir moindre que toute quantité donnée. C'est ce que nous exprimerions en disant que les grandeurs sont considérées comme *limites de sommes de quantités infiniment petites, dont le nombre augmente indéfiniment.*

Les anciens ne faisaient pas de ces propositions le même usage que nous. Elles leur servaient bien à découvrir la relation entre les quantités proposées, et ils n'avaient certainement aucun doute à cet égard; mais ils se croyaient obligés de la démontrer avec une plus grande rigueur. Pour cela, ils supposaient que la véritable relation fût différente de celle qu'ils annonçaient, et faisaient une énumération complète de toutes les formes qu'elle pourrait avoir si celle-ci n'était pas exacte. Ils considéraient ensuite chacune de ces formes, et démontraient qu'elle était inadmissible parce qu'elle conduirait à une absurdité : d'où il résultait nécessairement que la relation annoncée était exacte.

Les contradictions ou absurdités auxquelles ils parvenaient s'obtenaient en se fondant sur la possibilité d'approcher indéfiniment des quantités proposées au moyen d'autres plus simples, mais ils n'avaient pas besoin de les faire varier comme le demande la théorie des limites; ils se contentaient de les supposer assez rapprochées de leurs limites pour faire ressortir l'absurdité : ce qu'ils n'auraient pu faire, toutefois, s'ils n'avaient pas démontré la possibilité d'une ap-

proximation indéfinie, qui est le caractère essentiel de ce que les modernes appellent *limites*.

C'est ce que nous rendrons bien clair par quelques exemples.

Les modernes ont fait entrer d'une autre manière encore les infiniment petits dans l'expression des variables dont les limites font connaître les quantités cherchées : ils ont considéré les rapports des infiniment petits entre eux. Lorsque deux quantités tendent vers zéro en dépendant l'une de l'autre, leur rapport est une quantité déterminée qui tend en général vers une limite finie. Cette considération, inconnue aux anciens, est un des plus grands progrès que la Science doive aux modernes.

L'objet principal de cet Ouvrage est de traiter des infiniment petits sous ces deux points de vue. Nous aurons cependant l'occasion d'employer les séries dans l'évaluation des grandeurs, et d'ailleurs nous ne pouvons nous dispenser de dire quelques mots sur la manière dont elles ont été introduites par les anciens géomètres.

CHAPITRE VI.

DES GRANDEURS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SÉRIES.

19. Les premiers exemples de ce procédé d'épuisement ou d'*exhaustion* ont été donnés par Euclide, d'abord, au sujet de la surface du cercle, ensuite pour le volume de la pyramide triangulaire, et enfin du cylindre, du cône et de la sphère.

Les diverses propositions qu'il établit sont fondées sur un même lemme dont voici l'énoncé :

Si d'une grandeur quelconque on ôte plus que sa moitié, que du reste on ôte de même plus que sa moitié, qu'on agisse de la même manière sur le nouveau reste, et ainsi de suite indéfiniment, les restes finiront par devenir moindres que toute quantité donnée.

La vérité de cette proposition s'aperçoit immédiatement; car, le premier reste étant moindre que la moitié de la grandeur, le second sera moindre que le quart, le troisième que le huitième, et ainsi de suite; ils finiront donc par être au-dessous d'une fraction aussi petite que l'on voudra de la grandeur proposée, et, par conséquent, moindres que toute quantité désignée.

Dans notre langage, cette proposition s'exprimerait ainsi :

La somme des parties successivement enlevées de la quantité proposée est une variable qui a pour limite cette quantité même.

Application au cercle.

20. Euclide commence par inscrire un carré dans le cercle. Sa surface, étant la moitié de celle du carré circonscrit, est plus grande que la moitié de celle du cercle. En l'enlevant, il restera donc moins de la moitié de la surface du cercle.

Si dans les quatre segments restants on inscrit des triangles isoscèles, ils seront les moitiés de rectangles circonscrits à ces segments, et, en les enlevant, il restera huit nouveaux segments formant une surface moindre que la moitié de celle des quatre précédents. En agissant de même pour ces huit segments, on enlèvera huit triangles qui en feront plus de la moitié, et laisseront, par conséquent, seize segments formant une surface moindre que la moitié des huit précédents. En continuant ainsi indéfiniment, on voit, d'après le lemme précédent, que ce qui reste du cercle peut devenir moindre que toute surface donnée.

On peut donc approcher indéfiniment de la surface du cercle au moyen d'une série dont chacun des termes est la réunion des triangles inscrits dans les segments égaux dont le nombre va toujours en doublant. La somme des deux premiers termes forme l'octogone régulier inscrit; la somme des trois premiers forme le polygone régulier d'un nombre double de côtés, et ainsi de suite indéfiniment. On approche donc ainsi du cercle au moyen de polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. La démonstration suppose que ce nombre va toujours en se doublant, ce qui n'est pas nécessaire à l'exactitude de la proposition. Mais si l'on ne voulait pas s'assujettir à cette condition, il faudrait considérer en même temps des polygones circonscrits semblables, et prouver que la différence des aires de deux polygones semblables, l'un inscrit, l'autre

circonscrit au cercle, peut devenir moindre que toute quantité donnée; et la différence du cercle à l'un ou l'autre de ces deux polygones étant moindre que cette même quantité, il s'ensuivrait que le cercle serait la limite des aires des polygones réguliers inscrits ou circonscrits, dont le nombre des côtés ne serait assujetti qu'à augmenter indéfiniment.

Application à la pyramide triangulaire.

21. Soit la pyramide SABC (*fig.* 1). En joignant les milieux des arêtes, on forme deux prismes triangulaires équivalents AHGDEF et HEICFG, et deux pyramides triangulaires SDEF, EHBI, égales entre elles, semblables à la première, et ayant leurs arêtes deux fois moindres que les siennes. L'un des deux prismes a pour base le quart de celle de la proposée et une hauteur moitié moindre. Il est plus grand que l'une des deux pyramides; car on reconnaît facilement qu'une pyramide DAHG, égale à l'une d'elles, pourrait être renfermée dans ce prisme : d'où il suit que la somme des deux prismes, étant plus grande que les deux pyramides restantes, est supérieure à la moitié de la pyramide proposée. En décomposant ces deux pyramides de la même manière que la première, les prismes que l'on formera seront supérieurs à la moitié de ces pyramides, et il restera un nombre double de pyramides ayant leurs arêtes moitié moindres.

En continuant ainsi indéfiniment, on obtient une suite de prismes en nombre indéfiniment croissant, et dont la somme peut différer aussi peu qu'on le voudra du volume de la pyramide. En effet, après avoir enlevé les prismes de premier ordre, il reste moins de la moitié de la pyramide; après avoir enlevé de ce reste les prismes de second ordre, le reste est moindre que la moitié du premier et, par conséquent, que le quart de la pyramide. Le troisième reste, moindre que la moitié du second, sera moindre que le hui-

tième de la pyramide, et ainsi de suite. Donc on peut arriver à un reste moindre que tout volume désigné. La pyramide est donc la limite de la somme des prismes d'ordres successifs, obtenus comme nous l'avons indiqué.

22. Nous nous bornerons à ces deux applications, qui suffisent à bien faire comprendre la conception d'Euclide; mais nous croyons devoir indiquer l'usage qu'il en a fait pour la démonstration des importants théorèmes qu'il avait en vue.

Les surfaces des cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.

Soient S, S′ les surfaces de deux cercles quelconques; R, R′ leurs rayons; il faut prouver que l'on aura

$$R^2 : R'^2 :: S : S'.$$

En effet, si cette proportion n'est pas exacte, on en pourra toujours former une avec les trois premiers termes, et un quatrième plus grand ou plus petit que S′. Soit Σ ce quatrième terme, et supposons-le d'abord plus petit que S. On aura donc, d'après cette hypothèse,

$$R : R'^2 :: S : \Sigma.$$

Inscrivons dans les deux cercles des polygones réguliers semblables, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Soient P, P′ leurs surfaces, on aura toujours

$$R^2 : R'^2 :: P : P',$$

et, par suite,

$$S : \Sigma :: P : P',$$

quelque rapprochées que les surfaces des polygones variables le soient de celles des cercles. Or, quelque petite que soit la différence de Σ et de S′, comme elle est invariable, et que la différence de P′ à S′ pourra devenir moindre, d'après le lemme il s'ensuit que P′ pourra devenir plus grand que Σ;

et alors la dernière proportion est impossible, puisque P est plus petit que S′, tandis que P′ est plus grand que Σ.

On arrive donc à une conséquence fausse en supposant que Σ soit plus petit que S : donc il ne l'est pas.

Il reste à prouver qu'il n'est pas plus grand.

Déjà Euclide, au lieu d'employer une démonstration analogue, a préféré ramener ce second cas au premier. Il fait remarquer pour cela que si la proportion en question devient exacte en prenant un quatrième terme, Σ plus grand que S′, elle pourrait le devenir en diminuant le troisième sans changer le quatrième. Désignant par Δ la surface plus petite que S, qu'il faudrait prendre pour troisième terme, on aurait

$$R^2 : R'^2 :: \Delta : S' \quad \text{ou} \quad R'^2 : R^2 :: S' : \Delta,$$

ce qui ne diffère en rien du premier cas et conduirait à la même absurdité au moyen des polygones réguliers inscrits. Donc le quatrième terme Σ ne peut être plus grand que S′; or il ne peut pas être plus petit. Donc il est S′, et la proportion énoncée est exacte. Telle est la démonstration d'Euclide.

23. Remarque. — Au lieu de ramener le second cas au premier, Euclide aurait pu le traiter directement d'une manière analogue, en employant des polygones réguliers circonscrits au lieu de polygones inscrits aux cercles; mais il aurait fallu qu'il démontrât d'abord qu'on peut approcher indéfiniment de la surface d'un cercle au moyen de polygones réguliers circonscrits dont on double indéfiniment le nombre des côtés. Il a voulu se dispenser de ce lemme, presque aussi facile à démontrer que le premier et qu'il était bon de connaître, quoique dans le cas actuel il ne fût pas indispensable. Il est impossible qu'il n'ait pas remarqué que, si l'on passe d'un polygone régulier circonscrit à un cercle, et qu'on double le nombre de ses côtés en menant des tangentes par les milieux entre ses points de contact, on a retranché de la

surface du premier une quantité plus grande que la moitié de sa différence avec la surface du cercle; si l'on agit de même sur le nouveau polygone, d'un nombre de côtés double, on en retranchera plus de la moitié du reste précédent, et, si l'on continue ainsi indéfiniment, ce qui restera de la première différence pourra devenir moindre que toute quantité donnée. Or, ces restes successifs étant les différences des polygones successifs au cercle, il est démontré qu'en doublant toujours le nombre des côtés des polygones circonscrits, leur différence avec la surface constante du cercle peut devenir moindre que toute quantité donnée.

S'il avait établi ce second lemme, il aurait facilement démontré que le quatrième terme Σ ne peut être plus grand que S'; il aurait suffi qu'il considérât des polygones réguliers semblables circonscrits aux deux cercles, et qu'il doublât le nombre des côtés des polygones successifs jusqu'à ce que l'on obtînt un polygone P' circonscrit au second cercle, qui différât moins de la surface de ce cercle que Σ n'en diffère; ce polygone étant alors plus petit que Σ, tandis que son correspondant P est toujours plus grand que S, la proportion $S : \Sigma :: P : P'$, à laquelle on est conduit, comme dans le premier cas, serait absurde. Donc le quatrième terme ne peut être plus grand que S'.

24. *Deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

En opérant dans ces deux pyramides la décomposition indiquée précédemment, les prismes correspondants seront toujours dans le rapport des bases des pyramides respectives, et, par conséquent, il en sera de même des sommes successives de ces prismes, qui pourront approcher indéfiniment des volumes des deux pyramides proposées. Il n'était pas difficile de juger que ces dernières étaient dans ce même rapport; il ne restait qu'à l'établir d'une manière incontes-

table. Soient V, V′ les volumes des deux pyramides; B, B′ les surfaces de leurs bases; S, S′ les sommes variables des prismes intérieurs aux pyramides. Si l'on n'a pas

$$B : B' :: V : V',$$

on pourra former une proportion entre les trois premiers termes et un volume plus grand ou plus petit que V′. Soit U ce volume, et supposons-le d'abord plus petit que V′. On aura ainsi

$$B : B' :: V : U,$$

et toujours

$$B : B' :: S : S';$$

par suite

$$V : U :: S : S'.$$

Or, en augmentant indéfiniment le nombre des prismes, S et S′ finiront par différer aussi peu qu'on voudra de V et de V′; par conséquent, S′ pourra différer de V′ moins que U n'en diffère, et sera, par suite, plus grand que U. Il est donc impossible que l'on ait

$$V : U :: S : S',$$

et, par conséquent, l'hypothèse qui y a conduit est absurde; il est donc impossible que la proportion dont les trois premiers termes sont B, B′, V ait pour quatrième terme une quantité plus petite que V′.

Euclide démontre, par le même détour que dans le cas des cercles, que le quatrième terme ne peut être plus grand que V′; d'où il conclut qu'il est V′, et que, par conséquent, les *deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

25. Archimède a employé la même méthode pour obtenir la mesure du segment parabolique. Il le considère de même comme limite d'une série; mais il a été obligé de calculer l'expression de la somme de cette série parce qu'il ne cher—

chait pas, comme Euclide, le rapport de deux quantités de même espèce, mais la mesure même du segment. C'est à cette circonstance qu'on doit la première détermination de la somme des termes d'une série convergente et la limite de cette somme.

26. *Aire du segment parabolique.* — Soit le segment parabolique quelconque ASB (*fig.* 2).

Soit SC le diamètre des cordes parallèles à AB; C sera le milieu de AB, et la tangente en S sera parallèle à AB. Le triangle ASB, moitié du parallélogramme ABA'B' dont les côtés AA', BB' sont parallèles à SC, et qui, par conséquent, renferme le segment ASB, sera plus grand que la moitié de ce segment.

Faisons pour les deux segments dont les bases sont SA, SB ce que nous venons de faire pour le premier; les triangles SDB, AD'S seront supérieurs aux moitiés de ces segments. Agissons de même pour les quatre segments restants dont les bases sont BD, DS, SD', D'A, et continuons ainsi indéfiniment. Il est facile de voir que le premier triangle ASB, plus les deux triangles du second ordre, plus les quatre de troisième ordre, plus les huit de quatrième, etc., forment une somme dont la limite est le segment ASB. Car on prend d'abord plus de sa moitié, ensuite plus de la moitié du premier reste, plus de la moitié du second, et ainsi de suite indéfiniment. D'où l'on conclut, par les mêmes raisons que dans l'exemple précédent, que le segment est la limite de la somme des triangles.

Cette démonstration est due à Archimède; il a prouvé ensuite que la somme des triangles d'un ordre quelconque est le quart de la somme de ceux de l'ordre précédent. Soit, par exemple, le segment ASB; menons DI, EH parallèles à BC, E étant le milieu de SB. On aura

$$BC = 2EH = 2DI;$$

d'où résulte, d'après la propriété des ordonnées de la parabole,

$$SI = \frac{1}{4} SC, \quad \text{et, par suite,} \quad IK = \frac{1}{4} CB,$$

d'où

$$DK = \frac{1}{4} CB.$$

Mais les triangles SCB, SDB, ayant même base SB, sont comme leurs hauteurs, ou comme les parallèles CB, DK, donc

$$SDB = \frac{1}{4} CSB.$$

De même, on aura

$$SD'A = \frac{1}{4} SAC.$$

Donc les deux triangles auxquels donne naissance un triangle ASB, d'un ordre précédent, forment une somme égale au quart de celui-ci ; car ce que nous venons de dire de ASB peut se dire d'un triangle d'un ordre quelconque.

Il résulte de là que les sommes des triangles des différents ordres forment la progression géométrique suivante :

$$ASB, \quad \frac{ASB}{4}, \quad \frac{ASB}{4.4}, \quad \frac{ASB}{4.4.4}, \ldots$$

C'est précisément à cette occasion qu'Archimède a trouvé la formule de la somme des termes d'une progression.

Ses raisonnements pourraient s'appliquer à toute progression, mais il ne s'occupe que de celle dont il a besoin et trouve pour la somme arrêtée au terme l

$$\frac{4\,ASB}{3} - \frac{l}{3}.$$

La somme des triangles de différents ordres peut donc différer aussi peu qu'on voudra de $\frac{4}{3}$ ASB, et comme cette

somme peut différer aussi peu qu'on voudra du segment, il était bien facile de reconnaître que ce segment et $\frac{4}{3}$ ASB ont la même valeur. Mais, pour éviter les objections des sophistes, Archimède se croit obligé de démontrer que le segment ne peut être ni plus petit ni plus grand que les $\frac{4}{3}$ du triangle SAB, ou les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme ABA'B'. Sa démonstration est analogue aux précédentes, et nous nous dispenserons de la reproduire.

27. Ces exemples suffisent pour faire comprendre comment les anciens ont été conduits à considérer que les grandeurs pouvaient être approchées indéfiniment par des sommes de grandeurs fixes, dont le nombre croissait indéfiniment; ou, suivant notre langage, comment des grandeurs pouvaient être considérées comme limites de séries. Nous allons maintenant montrer comment la méthode des modernes abrége leurs démonstrations fondées sur la méthode de réduction à l'absurde.

Les mêmes propositions démontrées par la méthode des limites.

Nous conserverons les démonstrations des anciens pour établir que le cercle, la pyramide et le segment parabolique sont les limites de grandeurs d'espèce plus simple. La simplification consistera seulement dans le passage de la relation des variables à celle des limites. Considérons successivement les trois propositions précédentes.

28. *Les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.*

En [illegible]servant les mêmes dénominations que ci-dessus,

nous aurons d'abord

$$\frac{P}{P'} = \frac{R^2}{R'^2};$$

or on a démontré que P et P′ ont pour limites les surfaces S, S′ des deux cercles ; et le principe général dit qu'en remplaçant les variables qui entrent dans une équation par leurs limites respectives, on a une équation exacte entre ces limites. L'équation précédente entre les variables P et P′ conduira donc à la suivante :

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2};$$

et, par conséquent, les surfaces de deux cercles quelconques sont entre elles comme les carrés de leurs rayons.

29. *Deux pyramides triangulaires de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.*

Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{S}{S'} = \frac{B}{B'};$$

remplaçant les variables S, S′ par leurs limites V, V′, on aura

$$\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'},$$

ce qu'il fallait démontrer.

30. *Mesure du segment parabolique.*

Archimède a démontré qu'en enlevant de ce segment l surfaces exprimées par les différents termes de la progr sion

$$ASB, \quad \frac{ASB}{4}, \quad \frac{ASB}{4^2}, \ldots, \quad \frac{ASB}{4^n}$$

le reste pourait devenir moindre que toute grandeur donnée; désignons cette somme par S_n, nous aurons

$$S_n = ASB\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right);$$

faisant croître n indéfiniment, les deux membres tendront vers des limites égales. Or celle du premier membre est le segment parabolique; celle du second est $\frac{4}{3}$ ASB : donc la surface du segment est les $\frac{4}{3}$ du triangle ASB ou les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme BAA'B'.

31. *Mesure de la pyramide triangulaire.*

La décomposition faite par Euclide l'a conduit à trouver le rapport de deux pyramides; mais elle aurait pu lui donner la mesure même de la pyramide s'il avait connu la formule d'Archimède pour la somme des termes de la progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{4}$.

En effet, en désignant par b la base et par h la hauteur de la pyramide, les deux prismes du premier ordre auront chacun pour mesure $\frac{bh}{8}$, et leur somme sera $\frac{bh}{4}$.

Or les prismes d'un ordre quelconque sont en nombre double de ceux de l'ordre précédent; mais, leurs dimensions étant deux fois moindres, leurs volumes sont huit fois moindres : leur somme sera donc le quart de la précédente.

Les termes de la série dont la limite est le volume de la pyramide seront donc

$$\frac{bh}{4}, \quad \frac{bh}{4^2}, \quad \frac{bh}{4^3}, \ldots.$$

Si donc on désigne par V_n le volume de la somme des

prismes jusqu'à un ordre quelconque n, on aura

$$V_n = bh\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}\right).$$

Prenant les limites des deux membres, et observant que la progression est précisément celle d'Archimède, moins le terme 1, on aura :

Le volume de la pyramide est égal à $\frac{bh}{3}$, *ou au tiers du produit de la base par sa hauteur.*

32. Nous allons passer maintenant au second point de vue sous lequel les anciens ont considéré les grandeurs comme limites. C'est à Archimède seul que revient l'honneur de cette féconde conception.

CHAPITRE VII.

DES GRANDEURS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

33. Une des conceptions les plus importantes dans la mesure des grandeurs est celle par laquelle on les considère comme limites de sommes de quantités d'espèce plus simple, qui tendent indéfiniment vers zéro, en même temps que leur nombre augmente indéfiniment. Ces variables, qui ont zéro pour limite et que nous désignerons sous le nom d'*infiniment petits,* sont susceptibles d'une grande indétermination ; elles ne sont assujetties qu'à la condition que la différence de leur somme à la quantité proposée ait pour limite zéro. Il reste donc beaucoup de latitude dans le choix de ces éléments, et l'on peut en profiter pour simplifier considérablement les calculs.

Le principe fondamental sur lequel se fondent ces simplifications est le suivant :

Théorème. — *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*

Soient, en effet, les infiniment petits

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \quad \alpha_m,$$

dont la somme tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \ldots, \quad \beta_m,$$

tels, que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \quad \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

aient tous pour limite l'unité

Or, on sait que si l'on a une suite de fractions dont les dénominateurs sont positifs, la somme des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est intermédiaire entre la plus petite et la plus grande.

La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m}$$

sera donc comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes, et tendra nécessairement aussi vers l'unité : d'où il résulte que son dénominateur tendra vers une limite égale à celle du numérateur; la somme $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_m$ a donc la même limite que $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$, ce qu'il fallait démontrer.

Si l'une de ces deux sommes était invariable, la limite de l'autre serait égale à la valeur constante de la première, puisque la limite de leur rapport est l'unité.

Remarque. — Si le rapport de deux éléments correspondants quelconques des deux sommes, au lieu de tendre vers l'unité, tendait vers une même limite l, le rapport des deux sommes serait compris entre deux rapports ayant l pour limite, et aurait, par conséquent, cette même limite. Donc les limites des deux sommes ont précisément l pour rapport.

34. On voit, par ce qui précède, que la recherche des limites de sommes d'infiniment petits peut conduire à celle des limites des rapports, que nous aurons bientôt à considérer directement. Cette dernière recherche est facilitée par un théorème analogue au précédent, et qu'il est bon d'établir dès à présent.

35. Deuxième théorème. — *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

Soient, en effet, α et β deux quantités infiniment petites; α' et β' d'autres quantités telles, que les limites de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et de $\frac{\beta}{\beta'}$ soient égales à l'unité, et que, par suite, les limites des rapports inverses $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ soient aussi égales à l'unité; on aura identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\,\frac{\beta'}{\beta}\,\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les limites de quantités égales étant égales, et la limite d'un produit étant le produit des limites, on tirera de cette identité, en désignant les limites par l'abréviation *lim* et en observant que $\lim\frac{\beta'}{\beta}=1$ et $\lim\frac{\alpha}{\alpha'}=1$,

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

36. On peut énoncer ces deux mêmes théorèmes d'une autre manière, au moyen de la proposition suivante :

Lorsque la limite du rapport de deux quantités est l'unité, leur différence est INFINIMENT PETITE PAR RAPPORT A L'UNE QUELCONQUE DES DEUX; c'est-à-dire que *le rapport de cette différence à l'une quelconque de ces quantités a pour limite zéro.*

Et réciproquement : *Si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à l'une d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.*

Soient, en effet, α et α' deux quantités quelconques et δ leur différence; on aura

$$\alpha' = \alpha + \delta, \quad \text{d'où} \quad 1 = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\delta}{\alpha'}.$$

Donc, si la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, celle de $\frac{\delta}{\alpha'}$ est zéro, et réciproquement.

Si l'on avait divisé par α au lieu de α', on aurait prouvé que $\frac{\delta}{\alpha}$ a pour limite zéro; et d'ailleurs il est évident que δ étant la différence de α et α' est contenue dans le plus grand une fois de plus que dans l'autre, et que, par conséquent, les rapports $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$ sont en même temps infiniment petits.

On pourra donc énoncer les deux théorèmes de cette autre manière :

Les limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits ne sont pas changées, quand on remplace ces infiniment petits par d'autres qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport à eux.

Le grand avantage que l'on retire de ces théorèmes consiste en ce qu'ils permettent souvent de négliger, dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison et le calcul difficiles. Il suffit toujours que cette partie soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites.

Divers ordres d'infiniment petits.

37. Si l'on considère plusieurs infiniment petits dépendant les uns des autres, de telle sorte que, l'un étant déter-

miné, tous les autres le soient, et que l'on en prenne un en particulier pour y rapporter tous les autres, on appellera infiniment petits du premier ordre ceux dont les rapports avec celui-là auront des limites finies; infiniment petits du second ordre ceux dont les rapports avec le même infiniment petit principal seront des infiniment petits du premier ordre; et en général infiniment petits de l'ordre n ceux dont les rapports avec l'infiniment petit principal seront des infiniment petits de l'ordre $n-1$.

Lorsque l'on veut exprimer seulement que le rapport d'un infiniment petit à un autre a pour limite zéro, on dit que le premier est infiniment petit par rapport au second.

Cela posé, il est très-facile d'exprimer au moyen de l'infiniment petit principal ceux de tous les ordres différents. En effet, désignons le premier par α, et par β un infiniment petit du premier ordre dont la limite du rapport avec α soit K; on aura

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \omega, \quad \text{d'où} \quad \beta = \alpha(K + \omega),$$

ω tendant vers zéro en même temps que α.

L'expression de tout infiniment petit du premier ordre sera donc de la forme

$$\alpha(K + \omega),$$

ω étant infiniment petit, et K fini.

Soit maintenant γ un infiniment petit du second ordre, le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ devant être du premier ordre; on aura

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha(K + \omega),$$

et, par conséquent, la forme de tout infiniment petit du second ordre sera

$$\alpha^2(K + \omega).$$

En continuant ainsi, il est facile de voir que la forme générale des infiniment petits de l'ordre n est

$$\alpha^n(K + \omega),$$

K étant fini et ω infiniment petit.

Mais il y a souvent lieu de considérer des infiniment petits dont le rapport avec une puissance fractionnaire de α a une limite finie; et l'on est convenu d'appeler infiniment petit de l'ordre $\frac{p}{q}$ celui dont le rapport avec $\alpha^{\frac{p}{q}}$ a une limite finie : la formule qui représentera les quantités de cet ordre sera donc

$$\alpha^{\frac{p}{q}}(K + \omega).$$

CHAPITRE VIII.

COMMENT LES AIRES DES COURBES PLANES PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

38. *Sommes de parallélogrammes infiniment petits.* — Considérons une surface plane limitée par des arcs de courbes quelconques; divisons-la par un système de parallèles dont les distances soient dans des rapports arbitraires, mais tendent toutes vers zéro. La somme des aires comprises entre ces parallèles successives est toujours identique avec l'aire cherchée, et chacune de ces aires élémentaires offre la même difficulté que la proposée, puisqu'elle renferme des courbes dans son périmètre.

Mais si à chacune de ces aires élémentaires on supprime ou l'on ajoute des parties infiniment petites par rapport à ces aires respectives, et qui fassent disparaître la partie courbe de leur périmètre, la limite de la somme de ces nouvelles aires plus simples sera l'aire cherchée, d'après le principe général. Le moyen le plus commode d'obtenir ce résultat consiste à mener par les extrémités de chacune des cordes des parallèles à une même direction arbitraire, terminées à la corde suivante. Soient, en effet, MN, M'N' deux parallèles consécutives quelconques : en menant par les extrémités M', N' (*fig.* 4) des parallèles M'H', N'I' à une direction choisie à volonté, on retranche les parties N'I'N, M'H'M; en menant les parallèles MH, NI par les extrémités M, N, on ajouterait, au contraire, les parties MHM', NN'I. Or deux de ces quatre parties sont moindres

que le parallélogramme NIN'I', et les deux autres moindres que le parallélogramme MHM'H'; ces deux parallélogrammes sont infiniment petits par rapport au parallélogramme M'H'N'I', qui est moindre que le segment de la courbe; car leurs rapports à M'H'N'I' sont les mêmes que ceux de leurs bases MH', NI' à la base H'I' et ces derniers tendent vers zéro, puisque, les parallèles MN, M'N' se rapprochant indéfiniment, MH', NI' tendent vers zéro, tandis que H'I' reste fini. Il suit de là que les rapports des parallélogrammes HH', II' au segment de la courbe ont pour limite zéro; il en est de même, à plus forte raison, des triangles formés par les arcs MM', NN', et par conséquent *l'aire de la courbe est la limite de la somme des parallélogrammes ayant pour bases les cordes parallèles, pour hauteurs leurs distances, et pouvant être entièrement intérieurs, ou en partie extérieurs à cette aire.*

On peut même remarquer qu'il n'est pas nécessaire que les sommets des parallélogrammes soient aux extrémités mêmes des cordes : il suffit qu'ils soient en des points infiniment voisins de ces extrémités; il n'est même pas nécessaire que ces parallélogrammes soient contigus, pourvu que l'intervalle entre deux consécutifs soit infiniment petit par rapport aux hauteurs infiniment petites de ces parallélogrammes; car cela revient à retrancher de chaque élément une partie infiniment petite par rapport à lui-même. Cette considération générale, dont l'exactitude résulte du principe fondamental, s'applique à tout ce qui suit.

Pour abréger, nous représenterons une somme de termes ayant une même expression générale par le signe $\sum$ suivi de cette expression. Ainsi, u désignant une corde quelconque et α la distance de deux cordes consécutives, $\sum u\alpha$ représentera la somme des aires des parallélogrammes varia-

bles, et $\lim \sum u\alpha$ représentera la limite de leur somme, ou l'aire de la courbe.

39. *Sommes de trapèzes infiniment petits.* — Au lieu de supposer les lignes MH, M'H', NI, N'I' parallèles à une direction fixe, on pourrait les mener dans des directions différentes les unes des autres, et variables d'une manière arbitraire d'une tranche à l'autre : il suffit qu'elles fassent toujours un angle fini avec les cordes. En effet, la figure NIN'I' deviendra un trapèze dont les bases N'I, NI' seront infiniment petites, puisque les lignes N'I' font avec MN des angles finis, et que la hauteur du trapèze est infiniment petite; la mesure de ce trapèze a donc un rapport infiniment petit avec celle du trapèze intérieur M'H'N'I' et, par conséquent, avec le segment même de la courbe. Il en serait de même du trapèze MHM'H'. Si donc, au lieu de ce segment, on prend un des trapèzes ayant pour base MN, M'N' MI', NH', on ne fait qu'ajouter ou retrancher à l'élément exact de l'aire cherchée une quantité infiniment petite par rapport à cet élément; et la limite de la somme de ces trapèzes sera précisément égale à la somme des éléments exacts de cette aire ou à cette aire elle-même.

Le cas le plus simple est celui des trapèzes inscrits dans le segment : les côtés non parallèles sont alors les cordes MM', NN'. Il peut aussi être quelquefois utile de faire concourir toutes les lignes MH, M'H', NI, N'I' vers un même point; et c'est ce qu'a fait Archimède dans une de ses méthodes pour la quadrature de la parabole.

40. *Sommes de secteurs infiniment petits.* — Il n'est pas nécessaire de supposer parallèles les cordes qui divisent l'aire en éléments infiniment petits. On peut assujettir leurs directions à une loi quelconque, suivant les circon-

stances; la seule condition nécessaire est de n'ajouter ou retrancher à chaque élément exact qu'une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Une des lois les plus simples est celle qui fait passer toutes les cordes par un même point. Soient O ce point (*fig.* 5) et OM, OM′ deux sécantes faisant entre elles un angle infiniment petit; la somme des éléments OM′M est identique avec l'aire cherchée, si le point O est dans son intérieur; et cette aire sera la limite de la somme des aires que l'on obtiendra en ajoutant ou retranchant à chacun de ces éléments une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Cette modification des éléments exacts, et qui a toujours pour objet de les simplifier, peut être faite de bien des manières différentes. On pourrait mener par M, M′ des droites dans des directions déterminées, et substituer les triangles rectilignes à l'élément exact; on pourrait aussi, au lieu de lignes droites, mener des courbes arbitraires : mais ce qui est ordinairement le plus simple, c'est de décrire des arcs de cercle ayant O pour centre, et c'est ce qu'a fait Archimède dans sa quadrature de la spirale.

Il est facile de voir, en effet, que le rapport des deux secteurs circulaires semblables ayant pour rayons OM, OM′, étant celui des carrés de ces lignes, a pour limite l'unité, et que, par conséquent, leur différence est infiniment petite par rapport à ces secteurs. Or l'un d'eux est compris entièrement dans l'élément OM′M, et celui-ci est compris entièrement dans l'autre secteur; car on peut supposer l'angle O assez petit pour que les rayons vecteurs de la courbe croissent ou décroissent constamment de M en M′. Donc le rapport de chacun des deux secteurs à l'élément exact de l'aire a aussi pour limite l'unité, et l'aire cherchée est la limite de la somme des secteurs circulaires infiniment petits, intérieurs ou extérieurs.

Si le point O n'était pas dans l'intérieur de l'aire proposée, celle-ci serait la différence de deux aires auxquelles ce point appartiendrait, et que l'on considérerait séparément, comme on vient de le dire. On pourrait aussi prendre la différence de deux secteurs compris entre les mêmes rayons, et chercher la limite de la somme de ces différences.

Au lieu de supposer que les cordes passent par un même point, on pourrait les mener tangentes à une courbe donnée; on pourrait les assujettir à d'autres lois encore. Toutes ces généralisations n'offrent aucune difficulté quand on a bien saisi les principes précédents, et nous ne nous y arrêterons pas.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A QUELQUES EXEMPLES.

41. *Aire du segment parabolique.* — Cette question nous offrira des exemples de procédés très-divers qu'on peut employer dans la recherche des quadratures, et donnera une idée de la variété des ressources que présente la méthode infinitésimale.

Première solution. — En rapportant la parabole au diamètre AB (*fig.* 6) de la base CD du segment oblique donné, et à la tangente AY parallèle à cette base, les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses, et l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 = 2px.$$

Coupons la surface par des parallèles à AY; l'aire ADC pourra être considérée comme limite de la somme des parallélogrammes intérieurs, qui seront divisés en deux parties égales par le diamètre AB; de sorte que les deux aires ABC, ABD, étant limites de sommes égales, sont équivalentes. Il suffit donc de calculer la moitié ABC.

On connaîtra l'aire ABC si l'on connaît son rapport au complément AEC de cette aire au parallélogramme ABCE; et pour cela, nous comparerons deux parallélogrammes correspondants PMHP′, QMKQ′ des sommes qui ont pour limites ces deux aires. En désignant par x, y les coordon-

nées du point quelconque M, et par h et k les accroissements qu'elles subissent quand on passe de M à M', on aura

$$\frac{\text{PMHP}'}{\text{QMKQ}'} = \frac{yh}{xk},$$

et l'on a, par l'équation de la courbe,

$$y^2 = 2px, \quad (y+k)^2 = 2p(x+h),$$

d'où

$$2yk + k^2 = 2ph.$$

On tire de là h, au moyen de k, et le rapport cherché $\frac{yh}{xk}$ devient

$$\frac{y(2y+k)}{2px} \quad \text{ou} \quad 2 + \frac{ky}{2px}.$$

Ce rapport tend donc vers la limite 2 lorsque k tend vers zéro. Les deux aires ACB, AEC sont donc les limites de sommes d'infiniment petits tels, que le rapport de deux correspondants quelconques tend vers la même limite 2 : donc, d'après les principes démontrés (n° 36), le rapport des aires ABC, AEC est précisément 2.

Ainsi l'aire ACB est les deux tiers du parallélogramme AECB; et l'aire proposée ACD est les trois quarts de ce même parallélogramme, ou du triangle rectiligne ACD, comme Archimède l'a démontré le premier.

Deuxième solution. — Il est facile de calculer directement l'aire AEC, qui est la limite de la somme des parallélogrammes QMKQ' ou QHM'Q', dont l'expression générale est $xk \sin A$, A désignant l'angle YAX. k désignant l'accroissement successif de y, il est nécessaire d'exprimer x au moyen de y; ce qui donnera pour expression d'un quelconque des parallélogrammes $\frac{y^2 k \sin A}{2p}$. Or si l'on sup-

pose dans ce cas-ci que les hauteurs des parallélogrammes soient toutes égales, ce qui était inutile dans la solution précédente, les valeurs successives de y seront

$$k, \quad 2k, \quad 3k, \ldots, \quad nk,$$

et l'on aura

$$nk = \mathrm{AE}, \quad \text{ou} \quad (n+1)k = \mathrm{AE},$$

suivant qu'on prendra les parallélogrammes QM′ ou QK, ce qui est indifférent.

Il s'agit donc de trouver la limite de la somme

$$\frac{k^3 \sin \mathrm{A}}{2p}(1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2),$$

lorsque n croît indéfiniment, et que k décroît en même temps de telle sorte que l'on ait toujours $nk = \mathrm{AE}$.

Or Archimède a donné pour la sommation des carrés des nombres naturels une formule qui, écrite avec les signes employés par les modernes, donne

$$1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Il faut donc trouver la limite de l'expression suivante

$$\frac{k^3 \sin \mathrm{A}}{2.p} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

ou

$$\frac{\mathrm{AE}(\mathrm{AE}+k)(2\mathrm{AE}+k)\sin \mathrm{A}}{2.2.3p},$$

lorsque k tend vers zéro. Cette limite est évidemment

$$\frac{\overline{\mathrm{AE}}^3 . \sin \mathrm{A}}{2.3p} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AE} \sin \mathrm{A}}{3},$$

en observant que $\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2}{2p} = \mathrm{AB}$.

L'aire AEC est donc le tiers du parallélogramme ABCE; et l'aire ABC en est les deux tiers, comme nous l'avions trouvé par le premier procédé.

Troisième solution. — Cette solution aura l'avantage de donner un exemple d'un mode de décomposition très-différent des précédents. Nous y considérerons une aire comme limite d'une somme d'aires infiniment petites déterminées par des droites tangentes à une même courbe.

Soient ACC′ (*fig.* 7) le segment parabolique: AB le diamètre, CD la tangente en C, d'où résulte AD = AB; nous allons comparer les deux aires ACB, DAC.

Nous considérerons ACB comme limite d'une somme de trapèzes inscrits PMM′P′, dont les côtés PP′ situés sur AB tendent tous d'une manière quelconque vers zéro.

Quant à l'aire DAC, nous mènerons en M et M′ les deux tangentes MT, M′T′, d'où résultera AT = AP, AT′ = AP′, TT′ = PP′. Si par le point de rencontre R de ces tangentes on mène une parallèle à AB, on aura le diamètre des cordes MM′, qui passera par conséquent par le milieu de MM′; de sorte que l'aire du triangle TRT′ sera la moitié de celle du trapèze PP′MM′. Or il est facile de reconnaître que l'aire DAC est la limite de la somme des triangles T′TR. En effet, cette aire est exactement la somme des aires comprises entre chacun des arcs MM′, la tangente M′T′, la base T′T et la tangente TM, terminée en M. Mais chacune de ces aires diffère du triangle correspondant T′TR d'une quantité infiniment petite par rapport à lui, lorsque PP′ tend vers zéro; car cette différence est moindre que le triangle rectiligne MRM′ dont le rapport au triangle T′RT est celui des rectangles des côtés qui comprennent leurs angles en R, qui sont supplémentaires; rapport qui est évidemment infiniment petit. Donc l'aire DAC est la limite de la somme des triangles T′RT.

Cela posé, les deux aires ACB, DAC, étant limites de

sommes d'infiniment petits qui sont dans le rapport de 2 : 1, seront elles-mêmes dans ce rapport. Donc ACB est les deux tiers du triangle DBC, ou du parallélogramme construit sur AB et BC; ce qui ramène aux résultats précédemment obtenus.

42. *Généralisation du problème.* — Au lieu de l'équation particulière $y^2 = 2px$, prenons l'équation plus générale $y^n = px^m$, n et m étant des nombres entiers quelconques, positifs ou de signes contraires. Les courbes qu'elle représente seront paraboliques dans le premier cas; dans le second, elles seront des hyperboles ayant les axes de coordonnées pour les asymptotes.

1° La courbe représentée par l'équation $y^n = px^m$, m et n étant positifs, passe par l'origine, et nous nous proposons de mesurer l'aire comprise entre un arc AM (*fig.* 8) et les coordonnées MB, AB de son extrémité M.

Pour cela, nous chercherons le rapport des deux aires AMB, AMC, et, à cet effet, nous comparerons deux parallélogrammes correspondants NP′, NN′, éléments infiniment petits des sommes dont les limites sont AMB, AMC. En désignant par x, y les coordonnées de N, par h, k leurs accroissements en passant de N en N′, le rapport des deux parallélogrammes sera $\frac{yh}{xk}$, et sa limite sera $\frac{y}{x} \lim \frac{h}{k}$. Pour obtenir la limite de $\frac{h}{k}$, il faut exprimer que les deux points sont sur la courbe, ce qui donne

$$y^n = px^m, \quad (y+k)^n = p(x+h)^m.$$

Développant les puissances, et supprimant les premiers termes des deux membres, qui se détruisent, il vient

$$k(ny^{n-1} + \beta) = h(mpx^{m-1} + \alpha),$$

β représentant une somme de termes qui renferment k depuis la première puissance jusqu'à la $(n-1)^{ième}$, et α une somme de termes renfermant h depuis la première puissance jusqu'à la $(m-1)^{ième}$. On tire de cette équation

$$\frac{h}{k} = \frac{ny^{n-1} + \beta}{mpx^{m-1} + \alpha},$$

et, par conséquent,

$$\lim \frac{h}{k} = \frac{ny^{n-1}}{mpx^{m-1}}.$$

La limite du rapport des deux parallélogrammes est donc

$$\frac{ny^n}{mpx^m} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m}.$$

Donc aussi le rapport des deux aires AMB, AMC est $\frac{n}{m}$; l'aire cherchée AMB est donc au parallélogramme ABMC dans le rapport $\frac{n}{m+n}$; et sa valeur est $\frac{nab \sin A}{m+n}$, si l'on désigne par a, b les coordonnées de M, et par A l'angle des axes. Si l'aire, au lieu d'être prise à partir de l'origine, l'était entre deux ordonnées correspondant aux abscisses a, a', elle aurait évidemment pour expression

$$\frac{n}{m+n}(a'b' - ab)\sin A.$$

2° Si les deux exposants sont des signes contraires, on peut mettre l'équation sous la forme

$$y^n x^m = p,$$

en supposant m et n positifs.

Les deux parallélogrammes MP′, MQ′ (*fig.* 9), éléments correspondants des sommes qui ont pour limites les aires

NN'BB', NN'CC', ont pour rapport $-\frac{yh}{xk}$, a et k étant de signes contraires et satisfaisant à l'équation

$$(y+k)^n(x+h)^m = p$$

ou

$$[y^n + (ny^{n-1}+\beta)k][x^m + (mx^{m-1}+\alpha)h] = p,$$

β représentant un ensemble de termes renfermant k à la première puissance ou à des puissances supérieures, et α un ensemble de termes renfermant h à un degré égal ou supérieur à l'unité.

Effectuant le produit et supprimant les termes $y^n x^m$ et p qui se détruisent, il vient

$$(ny^{n-1}+\beta)kx^m + (mx^{m-1}+\alpha)hy^n$$
$$+ (ny^{n-1}+\beta)(mx^{m-1}+\alpha)kh = 0.$$

Divisant par k et prenant les limites, on trouve

$$ny^{n-1}x^m + mx^{m-1}y^n \lim\frac{h}{k} = 0;$$

d'où

$$\lim\frac{h}{k} = -\frac{nx}{my}.$$

Le rapport des deux rectangles MP', MQ' a donc pour limite $\frac{n}{m}$, et, par conséquent, le rapport des aires NN'BB', NN'CC' est $\frac{n}{m}$.

Il est facile d'avoir une seconde relation entre ces deux aires.

En effet, la première, ajoutée au parallélogramme AN, forme la même figure que la seconde ajoutée au parallélogramme AN'; donc la différence de ces aires est égale à la différence de ces deux parallélogrammes, ou

à $(a'b' - ab)\sin A$, si l'on désigne par a, b et a', b' les coordonnées des extrémités N, N'. On trouvera ainsi

$$NN'BB' = \frac{n}{n-m}(a'b' - ab)\sin A.$$

43. *Exemple d'une loi particulière pour les bases des parallélogrammes élémentaires.* — Comme les bases infiniment petites des parallélogrammes ne sont assujetties à aucune loi nécessaire, on choisit celle qui semble devoir donner les calculs les plus simples.

Dans un des exemples précédents, nous avons supposé ces bases égales ; dans d'autres, nous n'avons eu besoin de supposer aucune dépendance entre elles. Nous allons donner des exemples où la sommation devient très-facile quand on suppose que les abscisses des points de division sont en progression géométrique et que, par suite, leurs différences, ou les bases des parallélogrammes, forment une progression ayant la même raison. Ce procédé est dû à Fermat.

Soit l'équation

$$y = px^m,$$

dans laquelle nous supposerons m quelconque, positif ou négatif ; ce qui renferme les paraboles et hyperboles que nous venons de considérer. Cherchons l'aire comprise entre un arc quelconque MM' (*fig.* 10) de la courbe, les deux ordonnées extrêmes MP, M'P' et l'axe des x ; et, pour plus de simplicité, supposons les axes rectangulaires. Soient a, b les coordonnées de M ; a', b' celles de M'. Partageons PP' en n parties tendant vers zéro, et telles que les abscisses de tous les points de division forment une progression géométrique

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \ldots, \quad aq^n,$$

on aura

$$a' = aq^n;$$

de sorte que, n étant déterminé, q s'ensuivra; et q tendra vers l'unité lorsque n croîtra indéfiniment, de sorte que la distance de deux points consécutifs tendra vers zéro. L'expression générale de cette distance sera

$$aq^{r+1} - aq^r \quad \text{ou} \quad a(q-1)q^r.$$

Elles formeront donc une progression géométrique ayant pour premier terme $a(q-1)$ et pour raison q.

Or ces distances doivent être multipliées par les ordonnées successives qui seront aussi en progression géométrique, puisqu'elles ont pour expression générale px^m, et que les valeurs de x que l'on considère sont en progression géométrique. Les rectangles élémentaires auront donc pour mesure le produit des termes correspondants de deux progressions, et formeront, par conséquent, une nouvelle progression. On pourra donc avoir l'expression de la somme de ces rectangles, et il ne s'agira plus que de calculer la limite de cette expression.

La base du rectangle dont la première abscisse est aq^r sera $a(q-1)q^r$, sa hauteur $pa^m q^{mr}$ et sa surface $pa^{m+1}(q-1)q^{(m+1)r}$. La somme de ces rectangles sera

$$pa^{m+1}(q-1)[1 + q^{m+1} + q^{2(m+1)} + \ldots + q^{(n-1)(m+1)}],$$

ou, en sommant cette progression géométrique dont la raison est q^{m+1},

$$pa^{m+1}(q-1)\frac{[q^{(m+1)n}-1]}{q^{m+1}-1},$$

ou, à cause de $aq^n = a'$,

$$p(a'^{m+1} - a^{m+1})\frac{q-1}{q^{m+1}-1};$$

il ne reste donc plus qu'à trouver la limite du rapport $\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$, lorsque q tend vers l'unité; ce qui n'offre aucune

difficulté. Nous distinguerons deux cas, suivant que $m+1$ sera positif ou négatif.

1° Soit d'abord $m+1$ positif et représenté par le rapport de deux entiers quelconques $\frac{r}{s}$, il s'agit de trouver la limite de $\frac{q-1}{q^{\frac{r}{s}}-1}$, quand q tend vers 1; ou, en posant $q^{\frac{1}{s}}=t$, celle de $\frac{t^s-1}{t^r-1}$, quand t tend lui-même vers l'unité.

Si l'on supprime le facteur $t-1$, commun aux deux termes, et qu'on fasse ensuite $t=1$, on trouvera la limite de la fraction, qui sera

$$\frac{s}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m+1}.$$

Donc l'aire cherchée sera

$$\frac{p(a'^{m+1}-a^{m+1})}{m+1} \quad \text{ou} \quad \frac{a'b'-ab}{m+1}.$$

2° Soit maintenant $m+1=-\frac{r}{s}$, il faudra trouver la limite de $\frac{q-1}{q^{-\frac{r}{s}}-1}$ ou de $-q^{\frac{r}{s}}\frac{(q-1)}{q^{\frac{r}{s}}-1}$.

Or $q^{\frac{r}{s}}$ a pour limite 1, et, d'après le calcul précédent, le second facteur a pour limite $\frac{s}{r}$ ou $-\frac{1}{m+1}$.

La limite de la fraction en question est donc $\frac{1}{m+1}$ et l'aire aura encore pour expression

$$\frac{p(a'^{m+1}-a^{m+1})}{m+1} \quad \text{ou} \quad \frac{a'b'-ab}{m+1}.$$

Remarque. — L'aire dont nous venons de trouver l'expression étant la limite de la somme des rectangles ayant pour mesure yh ou $px^m h$, h désignant la différence infiniment petite de deux valeurs successives de x, suivant une loi arbitraire, il s'ensuit que la limite de la somme $\Sigma x^m h$, lorsque x passe de la valeur a à la valeur a' par degrés infiniment petits quelconques h, a pour valeur, quel que soit m,

$$\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Si l'on fait $a = 0$ et que $m + 1$ soit positif, cette expression se réduit à

$$\frac{a'^{m+1}}{m+1}.$$

44. Cette formule s'applique à toutes les valeurs positives ou négatives de m, excepté la valeur particulière -1, qui lui donnerait la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile de trouver la formule qui correspond à ce cas, en cherchant la limite vers laquelle tend l'expression $\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, lorsque l'on fait tendre m vers -1.

Divisant par a^{m+1}, dont la limite est l'unité, et remplaçant $m + 1$ par u, il s'agit de trouver la limite de l'expression

$$\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^u - 1}{u}$$

quand u tend vers zéro.

Posons $\left(\frac{a'}{a}\right)^u = 1 + \alpha$, α tendra vers zéro, et l'expression précédente devient $\frac{\alpha}{u}$, dont on éliminera u, au moyen de l'équation qu'on vient de poser en introduisant la nou-

velle variable α. On en tire, en prenant les logarithmes,

$$u \log \frac{a'}{a} = \log(1+\alpha), \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\log(1+\alpha)}{\log \frac{a'}{a}},$$

et il reste à trouver la limite de $\dfrac{\alpha \log \frac{a'}{a}}{\log(1+\alpha)}$ ou celle de $\dfrac{\alpha}{\log(1+\alpha)}$ qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Mais on a vu dans l'*Algèbre* (*voir* Note Ire) que lorsque α tend vers zéro, suivant une loi quelconque $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers une limite déterminée, que l'on désigne ordinairement par la lettre e, et qui n'est autre chose que la base du système dont la valeur incommensurable est

$$e = 2,71828182\ldots.$$

La limite de $\dfrac{\left(\frac{a'}{a}\right)^u - 1}{u}$ est donc $\dfrac{\log \frac{a'}{a}}{\log e}$, et l'expression $p\dfrac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ a pour limite

$$\frac{p \log \frac{a'}{a}}{\log e}.$$

Telle est l'expression de l'aire comprise entre deux ordonnées de la courbe dont l'équation est

$$xy = p,$$

et qui n'est autre que l'hyperbole du second degré rapportée à ses asymptotes.

Elle est équilatère, puisque nous avons supposé les axes rectangulaires; mais il aurait suffi d'introduire le facteur $\sin A$ pour avoir le cas général.

45. *Aire de la cycloïde.* — On appelle cycloïde la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sur une droite donnée. Soient TMU (*fig.* 11) une position quelconque du cercle qui roule sur la droite AB; M le point qui décrit la courbe; A la position où le point M est sur la droite fixe : l'arc MT sera égal à AT, d'après le sens qu'on attache au mot roulement. Si B est la position où M revient sur la droite fixe, on aura $AB = 2\pi a$, a étant le rayon du cercle décrivant, et quand le point de contact T vient au milieu C de AB, le point M se trouve à l'extrémité D du diamètre CD perpendiculaire à AB. Ce point D est le sommet de la cycloïde, et CD en est l'axe.

Cela posé, on demande la mesure de l'aire ABD comprise entre la courbe entière et sa base.

Cette question sera résolue si l'on détermine le complément de cette aire au rectangle ABA'B' qui est égal à $4\pi a^2$, ou à quatre fois l'aire du cercle générateur. C'est ce complément que nous allons chercher, et nous le regarderons comme limite de la somme des rectangles compris entre les perpendiculaires successives abaissées des points de la courbe sur A'B'.

Soient M, M' deux points infiniment voisins pris sur la cycloïde; MK, M'K' perpendiculaires à AB; MR, M'R' des parallèles à AB qui rencontrent en N, N' le cercle décrit sur CD comme diamètre. Comparons les deux rectangles MK', NR'; leur rapport est

$$\frac{MK.MH}{NR.M'R} \quad \text{ou} \quad \frac{QU}{MQ}.\frac{MH}{M'H},$$

et sa limite est égale au produit de $\frac{UQ}{MQ}$ par la limite du

rapport $\frac{MH}{M'H}$. Or nous allons montrer que cette dernière est précisément $\frac{MQ}{UQ}$, d'où il résultera que la limite du rapport des deux rectangles MK′, NR′ est l'unité; ce qui ramènera l'aire cherchée à celle du cercle CD.

En effet, le cercle mobile viendra dans la position qui amène le point M dans une position quelconque, en le faisant d'abord tourner autour de son centre immobile, ce qui amènera d'abord M en une position I; puis transportant le système parallèlement à AB, d'une quantité égale à l'arc MI, ce qui amènera le point de contact T en T′, et le point décrivant en M′, en prenant $TT' = MI = IM'$, et l'on sait que cet arc MI diffère de sa corde d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, puisqu'on a démontré dans la Trigonométrie que le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde, ou à son sinus, ou à sa tangente, a pour limite l'unité.

En nommant α l'angle de la corde MI avec MH, on aura

$$MH = \text{corde}\,MI \cos\alpha + MI,$$
$$M'H = \text{corde}\,MI \sin\alpha;$$

donc

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{MI}{\text{corde}\,MI \sin\alpha}.$$

Passant aux limites, et observant que $\frac{MI}{\text{corde}\,MI}$ a pour limite 1, et que l'angle α a pour limite l'angle M que fait MH avec la tangente au cercle en M, on aura

$$\lim \frac{MH}{M'H} = \frac{\cos M}{\sin M} + \frac{1}{\sin M} = \frac{1 + \cos M}{\sin M} = \cot \frac{1}{2} M$$
$$= \text{tang}\,QUM = \frac{MQ}{UQ},$$

comme nous l'avions annoncé.

Ainsi l'aire A A'P sera égale à celle du demi-cercle CND, puisqu'elles sont les limites de sommes de rectangles tels, que la limite du rapport de deux correspondants quelconques est l'unité. La somme des deux aires A A'D, DBB' est donc égale à celle du cercle générateur, et, par conséquent, l'aire ABD est égale à trois fois celle de ce même cercle.

Si l'on ne voulait mesurer qu'une portion de l'aire A A'D, on voit qu'elle serait équivalente à la portion correspondante du demi-cercle CD.

46. Descartes a donné plusieurs démonstrations très-élégantes de cette proposition. Nous nous bornerons à en rapporter une.

Soient C (*fig.* 12) le milieu de la base de la cycloïde, A une de ses extrémités, CD le diamètre du cercle générateur, O son centre; le triangle ADC sera équivalent au cercle générateur. Pour évaluer le segment ASD, soient deux points quelconques T, T' équidistants de A et C; M, M' les points de la courbe correspondant aux points de contact T, T' du cercle générateur avec la base : on aura, d'après l'égalité des arcs de cercle MT, M'T_1,

$$HT = H'T_1 = DP', \quad IH = I'H';$$

donc

$$MI + M'I' = MH + M'H' = NN'.$$

La somme des deux cordes MI, M'I' du segment ASD, équidistantes de la parallèle LOD' à la base, étant égale à la corde NN', il s'ensuit que, si l'on partage AC en parties infiniment petites par des couples de points dans les mêmes conditions que T, T', le segment ASD pourra être considéré comme limite de la somme de rectangles ayant pour bases les différentes cordes telles que MI, M'I', et pour hauteur les distances de deux consécutives : et la somme de deux

rectangles quelconques équidistants de la droite LL′, sera égale au rectangle du cercle O, compris entre NN′ et la corde infiniment voisine correspondant à celle qui suit MI. Or la somme de ces derniers rectangles a pour limite le demi-cercle LCL′; donc le segment ASD est équivalent au demi-cercle générateur, et l'aire de la demi-cycloïde vaut une fois et demie celle de ce cercle. Donc l'aire de la cycloïde est triple de celle du cercle générateur.

CHAPITRE X.

COMMENT LES VOLUMES DES CORPS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉS COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

47. *Solides de révolution.* — Supposons une surface plane quelconque tournant autour d'un axe AX (*fig.* 13) situé dans son plan, et proposons-nous de calculer la portion du volume engendré, qui sera comprise entre deux plans quelconques perpendiculaires à AX. Ces plans peuvent être considérés comme engendrés par des ordonnées MP, NQ; les deux surfaces courbes qui terminent le volume à mesurer sont engendrées par des arcs de courbes données MN, M'N', et ce volume est la différence de deux autres engendrés respectivement par les quadrilatères MNPQ, M'N'PQ. Bornons-nous donc au calcul d'un quelconque de ces derniers, par exemple celui qu'engendre MNPQ.

Décomposons ce volume au moyen d'une suite de plans perpendiculaires à l'axe, infiniment voisins les uns des autres, et substituons à ces éléments, dont la somme est constamment égale à ce volume même, d'autres éléments d'une espèce plus simple et tels, que le rapport de chacun d'eux à son correspondant ait pour limite l'unité. La limite de la somme de ces nouveaux éléments indéfiniment décroissants sera, d'après le principe fondamental, la valeur exacte du volume à mesurer. Soient R, R' deux points quelconques de MN, correspondant à deux plans sécants consécutifs; S, S' leurs projections sur AX : on peut sup-

poser SS′ assez petit pour que les ordonnées varient dans un même sens, en passant de R à R′; d'où il suit que les deux rectangles RSS′I et R′S′SI′ engendreront autour de AX des cylindres dont l'un sera plus petit et l'autre plus grand que la partie du solide proposé, comprise entre les deux plans sécants. Or le rapport de ces deux cylindres de même hauteur est égal à celui de leurs bases ou des carrés de leurs rayons RS, R′S′; et à mesure que S′ se rapproche de S, le rapport des ordonnées RS, R′S′ se rapproche de l'unité, ainsi que celui de leurs carrés. Donc la limite du rapport des deux cylindres est l'unité; et il en est de même, à plus forte raison, pour le rapport d'un quelconque de ces cylindres au volume intermédiaire qui est l'élément exact du volume cherché.

Donc le volume engendré par MNPQ est la limite d'une somme de cylindres ayant pour hauteurs les parties infiniment petites dans lesquelles on décompose PQ, et pour rayons de leurs bases les ordonnées de MN correspondant aux points de division de PQ.

Ces cylindres pourront être pris tantôt intérieurs, tantôt en partie extérieurs, sans que la limite de la somme soit changée, puisqu'ils satisfont toujours à la condition unique qu'ils doivent remplir.

Si l'aire génératrice n'est pas terminée à l'axe AX, mais à une seconde courbe M′N′, le volume engendré sera la différence de deux autres qui rentrent dans le premier cas. On pourra aussi le considérer comme la limite de la différence des deux sommes de cylindre, ou de la somme des différences des cylindres élémentaires correspondants. Cette proposition générale s'exprime par la formule suivante, dans laquelle V désigne le volume, et Y, y les ordonnées des deux courbes pour une même abscisse x,

$$V = \pi \lim \sum (Y^2 - y^2) h.$$

48. *Solides terminés par des surfaces quelconques.* — On concevra encore un système de plans parallèles, à des distances infiniment petites les uns des autres, et tels, que le solide entier que l'on veut mesurer soit compris entre le premier et le dernier; puis on cherchera à substituer à la partie comprise entre deux plans consécutifs quelconques un solide d'espèce plus simple et qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle. Or s'il arrive qu'en menant par tous les points du contour d'une des deux sections des parallèles à une même direction jusqu'au plan de l'autre la projection ainsi effectuée de la première courbe soit tout entière comprise dans la seconde, le cylindre ainsi formé sera tout entier compris dans la tranche du solide située entre les deux plans. Au contraire, le cylindre formé par des parallèles à la même direction, menée du contour de la seconde section au premier plan, renfermera entièrement cette même tranche. Mais le rapport des deux cylindres de même hauteur est égal à celui de leurs bases, lequel tend indéfiniment vers l'unité à mesure que la distance des deux plans tend vers zéro. Donc le rapport des deux cylindres, et, par suite, de la tranche du solide à l'un quelconque d'entre eux, a pour limite l'unité; ou, en d'autres termes, chacun de ces cylindres diffère de l'élément exact du solide, d'une quantité infiniment petite par rapport à cet élément. Donc enfin le volume proposé est limite d'une somme de cylindres ayant pour bases les sections du solide par des plans parallèles infiniment voisins, et pour hauteurs les distances de ces plans.

Ce premier cas est celui de tous les corps auxquels Archimède a appliqué ce procédé dont on lui est redevable.

49. Mais il peut arriver que les parallèles menées par les points d'une des sections ne soient pas toutes intérieures ou toutes extérieures à la tranche du solide, et alors le rai-

sonnement précédent ne suffirait pas. Dans ce cas, on concevra un second système de plans parallèles à une seconde direction, qui décomposeront une quelconque des premières tranches en solides infiniment petits dans deux sens, comprises entre quatre plans parallèles deux à deux et infiniment voisins. Jusqu'ici on n'a pas altéré les éléments du solide; mais ces filets infiniment étroits sont encore terminés à la surface du solide et ne seraient pas plus faciles à évaluer que ce solide entier. Or, en en retranchant ou en y ajoutant des parties infiniment petites par rapport à eux-mêmes, on peut les réduire à des parallélépipèdes. Il suffit pour cela de mener des plans parallèles à une troisième direction et passant par les extrémités d'une des cordes ou par des points qui en soient infiniment voisins. On aura ainsi des parallélépipèdes, l'un plus petit, l'autre plus grand que le filet du solide, et dont le rapport tendra indéfiniment vers l'unité. On pourra donc substituer à ce filet l'un ou l'autre, ou tout autre parallélépipède dont l'arête finie différerait infiniment peu des leurs; par exemple, et c'est ce qui sera le plus simple, on pourra prendre pour arêtes les cordes mêmes de la section du solide par les premiers plans. Ainsi, le rapport de chacun de ces parallélépipèdes au filet correspondant étant aussi près de l'unité qu'on le voudra, il en sera de même du rapport de leur somme à la tranche du solide. Or ces parallélépipèdes sont dans les mêmes conditions, relativement à la tranche du cylindre qui aurait pour base la même section du solide, et ses arêtes dans une direction arbitraire; et, par conséquent, le rapport de cette tranche à celle du solide a pour limite l'unité. On peut donc énoncer dans tous les cas cette proposition :

Tout solide peut être considéré comme la limite de la somme de cylindres ayant pour bases les sections par des plans parallèles infiniment voisins, et pour hauteurs les distances successives de ces plans.

Ce mode de décomposition est surtout employé lorsque l'équation de la surface est donnée en coordonnées rectilignes; alors les directions que l'on choisit pour les plans sécants sont celles des plans coordonnés.

Lorsque l'on a trouvé l'expression de l'aire de la section du corps par un plan quelconque, parallèle par exemple au plan des y et z, le produit de cette aire par la distance au plan infiniment voisin est la mesure du parallélogramme dont un côté serait exprimé par le même nombre que l'aire, et serait à une distance du côté parallèle égale à celle des deux plans; d'où l'on voit que la mesure du volume est ramenée à celle de l'aire d'une courbe dont l'ordonnée serait exprimée par la fonction de x qui représente l'aire de la section du corps.

Si la surface était donnée par une équation entre des coordonnées polaires, le mode de décomposition serait différent. Nous aurons occasion de nous en occuper plus tard et nous nous bornons ici à cette simple indication.

Les éléments que nous avons considérés ne sont infiniment petits que dans un seul sens, ou deux au plus. Dans un grand nombre de questions qui ne sont pas purement géométriques, il est nécessaire de décomposer les volumes en éléments infiniment petits dans tous les sens. Dans ce cas, on décomposera les filets infiniment petits dont il a été question ci-dessus par une série de plans infiniment voisins et parallèles au troisième plan coordonné.

CHAPITRE XI.

APPLICATION A LA MESURE DE QUELQUES VOLUMES.

Solides de révolution.

50. *Paraboloïde de révolution.* — Une parabole tournant autour de son axe AX (*fig.* 14), on demande le volume engendré par l'aire comprise entre un arc quelconque AB, l'ordonnée BC et l'axe AC.

Soient a, b les coordonnées de B, et $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole; partageons AC en un nombre n indéfiniment croissant de parties égales α : le volume cherché sera la limite d'une somme de cylindres ayant pour hauteur α, et pour bases les cercles ayant pour rayons les différentes ordonnées MP de la parabole, menées par tous les points de division de AC. L'expression générale du volume d'un de ces cylindres est $\pi y^2 \alpha$ ou $2\pi px\alpha$; leur somme $2p\Sigma x\alpha$ a pour limite $2p\pi\frac{x^2}{2}$ ou $p\pi a^2$ (*voir* n° 43).

On peut donc dire que ce volume est égal à celui d'un cylindre qui aurait pour base le cercle dont le rayon est AC, et pour hauteur le demi-paramètre. On peut encore donner une autre forme à l'expression précédente : en y remplaçant pa par son égal $\frac{b^2}{2}$, elle devient $\frac{\pi b^2 a}{2}$, et est égale à la moitié de la mesure du cylindre qui aurait BC pour base et AC pour hauteur, ou à trois fois la moitié du cône, qui aurait même base et même hauteur. C'est sous cette dernière forme qu'Archimède a présenté cette proposition.

51. *Segment d'ellipse tournant autour de sa corde.* — Soient une ellipse ayant pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

D'D (*fig.* 15) une corde parallèle à l'axe B'B, $2l$ sa longueur, d sa distance AE au centre, et A l'aire du segment DCD' qui tourne autour de sa corde fixe DD'; proposons-nous de mesurer le volume engendré V. Nous le considérerons comme limite de la somme des cylindres qui auraient pour hauteurs les subdivisions infiniment petites égales de D'D, et pour bases les cercles ayant pour hauteurs les perpendiculaires MQ abaissées sur DD' par les différents points de l'arc DD', qui correspondent aux points de division de DD'. Soient n le nombre des points de division de DE et α leur distance; la mesure d'un quelconque des cylindres infiniment petits sera

$$\pi(y-d)^2\alpha \quad \text{ou} \quad \pi(y^2 - 2dy + d^2)\alpha,$$

et leur somme peut se décomposer comme il suit :

$$\pi\Sigma(y^2 + d^2)\alpha - 2\pi d\Sigma y\alpha,$$

ou, en remplaçant y^2 par $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$,

$$\pi(b^2 + d^2)\Sigma\alpha - \frac{\pi b^2}{a^2}\Sigma x^2\alpha - 2\pi d\Sigma y\alpha.$$

Or

$$\Sigma\alpha = 2l, \quad \lim \Sigma y\alpha = A;$$

et, d'après la remarque du n° 43,

$$\lim \Sigma x^2\alpha = \frac{2l^3}{3}.$$

On aura donc

$$V = 2\pi l(b^2 + d^2) - 2\pi dA - \frac{2\pi b^2 l^3}{3a^2}.$$

On aurait le volume de l'ellipsoïde tout entier en faisant $d = 0$, $l = a$, et l'on trouverait ainsi

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2;$$

et si $b = a$, on a $\frac{4}{3}\pi a^3$ pour la mesure du volume de la sphère dont le rayon est a.

52. *Volume du tore.* — On appelle *tore* le solide engendré par un cercle qui tourne autour d'une droite située dans son plan.

Soient O (*fig.* 16) le centre du cercle générateur, R son rayon, AO $= a$; l'équation du cercle sera

$$y^2 + (x - a)^2 = R^2,$$

et le volume est la limite de la somme des volumes engendrés par les rectangles MNIK, qui sont les différences des cylindres infiniment petits engendrés par les rectangles QI, QK. L'expression générale de cette différence est

$$\pi\left(\overline{QN}^2 - \overline{QM}^2\right) MI = \pi(QN + QM)(QN - QM)MI$$
$$= 2\pi a . MN . MI = 2\pi a MIKN.$$

Or la limite de la somme des rectangles MIKN est l'aire du cercle. Donc *le volume du tore est égal à la surface du cercle générateur multipliée par la circonférence décrite par son centre.*

53. *Ellipsoïde de révolution.* — Supposons qu'une ellipse tourne autour de son axe AB $= 2a$ (*fig.* 17), et proposons-nous de calculer le volume du segment détaché par un plan perpendiculaire à cet axe, mené à une distance AD $= d$ du sommet A.

Soit l'équation de l'ellipse rapportée au sommet A

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

le volume sera la limite de

$$\pi \Sigma y^2 \alpha = \pi \frac{b^2}{a^2} \Sigma (2ax - x^2)\alpha.$$

Soit n le nombre des points de division de AD, on aura

$$n\alpha = d;$$

on retombe ainsi dans des calculs qui se sont déjà plusieurs fois présentés, et l'on trouvera (n° 43)

$$\lim \Sigma x\alpha = \frac{d^2}{2}, \quad \lim \Sigma x^2 \alpha = \frac{d^3}{3},$$

d'où

$$\lim \Sigma (2ax - x^2)\alpha = ad^2 - \frac{d^3}{3} = d^2 \frac{(3a - d)}{3}.$$

On aura donc pour expression du volume cherché V

$$V = \frac{\pi b^2 d^2}{3a^2}(3a - d).$$

Ce résultat coïncide avec celui d'Archimède. En effet, il énonce la proposition de la manière suivante :

Le segment de l'ellipsoïde est au cône de même base et même hauteur comme le demi-axe de l'ellipsoïde ajouté à la hauteur du segment complémentaire à l'ellipsoïde est à la hauteur de ce dernier.

Or on aperçoit facilement que les deux formules sont identiques.

54. *Hyperboloïde de révolution.* — Soit l'équation d'une hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ rapportée à son sommet A (*fig.* 18). Supposons qu'elle tourne autour de son axe transverse, et proposons-nous de calculer le volume V détaché par un plan perpendiculaire à l'axe mené à

une distance $AD = d$. Il est la limite de $\Sigma \pi y^2 \alpha$ ou de $\frac{\pi b^2}{a^2} \Sigma (x^2 + 2ax)\alpha$.

Or on a, d'après le n° 43 déjà cité plusieurs fois,

$$\lim \Sigma x \alpha = \frac{d^2}{2}, \quad \lim \Sigma x^2 \alpha = \frac{d^3}{3};$$

donc

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ad^2 + \frac{d^3}{3}\right) = \frac{\pi b^2 d^2}{3a^2}(3a + d).$$

Archimède, dans la solution qu'il a donnée de ce problème, cherche le rapport du segment de l'hyperboloïde au cône de même base et même hauteur, et parvient à la formule suivante, qui donne le même résultat.

Le volume du segment est à celui du cône de même base et même hauteur comme la hauteur du segment, plus trois fois le demi-axe transverse, est à cette même hauteur augmentée de l'axe transverse.

55. *Remarque.* — Si une surface dont l'aire est A tourne successivement autour de deux axes fixes parallèles U, V (*fig.* 19) situés dans son plan, les volumes engendrés auront pour différence le produit de l'aire A par la circonférence dont le rayon est la distance d des deux axes.

En effet, soit une perpendiculaire quelconque QPMM aux axes qui coupe ceux-ci en Q, P, et la courbe en M, M'. Soient $MP = x$, $M'P = x'$, $MQ = X$, $M'Q = X'$, α la distance de QM' à la parallèle infiniment voisine.

Les volumes engendrés autour des deux axes sont les limites des deux sommes suivantes :

$$\pi \Sigma (x'^2 - x^2)\alpha, \quad \pi \Sigma (X'^2 - X^2)\alpha,$$

et comme on a

$$X = x + d, \quad X' = x' + d,$$

il s'ensuit

$$X'^2 - X^2 = x'^2 - x^2 + 2d(x' + x);$$

donc la différence des deux sommes est $2\pi d\Sigma(x' - x)\alpha$ ou $2\pi d\Sigma MM'\alpha$.

Mais $\Sigma MM'\alpha$ a pour limite l'aire A; donc la limite de la différence des deux sommes, ou la différence de leurs limites, et, par conséquent, des volumes engendrés, est $2\pi dA$, comme nous l'avions annoncé.

56. *Volumes engendrés par des paraboles ou hyperboles d'ordres quelconques.* — Considérons le volume engendré par la révolution autour de l'axe des x, d'une courbe représentée par l'équation $y = px^m$, dans laquelle on suppose m quelconque en valeur et en signe, et qui peut, par conséquent, représenter des paraboles ou hyperboles de tous les ordres.

Le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe x et correspondant aux abscisses a, a' sera la limite de $\Sigma\pi y^2\alpha$, α représentant une quelconque des subdivisions infiniment petites de l'intervalle $\alpha' - \alpha$. En substituant à y sa valeur en x, il faudra trouver

$$\pi p^2 \lim \Sigma x^{2m}\alpha.$$

Or, d'après la remarque générale du n° 43, on a, entre les limites a, a',

$$\lim \Sigma x^{2m}\alpha = \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{2m+1}.$$

Le volume cherché a donc pour mesure

$$\pi p^2 \frac{(a'^{2m+1} - a^{2m+1})}{2m+1} = \frac{\pi b'^2 a' - \pi b^2 a}{2m+1}.$$

On l'obtient donc en divisant par $2m+1$ la différence des deux cylindres ayant pour bases les deux bases mêmes du

solide à évaluer, et pour hauteurs les abscisses correspondantes.

Solides non de révolution.

57. *Segment d'ellipsoïde.* — Rapportons la surface à des axes parallèles à un système de diamètres conjugués, dont l'un passe par le centre de la base du segment. Prenons ce dernier pour axe des x, et pour origine l'extrémité qui appartient au segment. L'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2ax-x^2}{a^2}.$$

Soit $AD=d$ (*fig.* 20) l'abscisse du plan de la base du segment qui est parallèle au plan YZ. Nous considérerons le volume du segment comme limite de la somme de cylindres ayant pour bases des sections parallèles à YZ et pour hauteurs les distances infiniment petites de ces plans successifs. Une quelconque de ces hauteurs s'obtiendra en multipliant la partie α correspondante de l'axe AX par le sinus de l'angle θ que ce diamètre AX de l'ellipsoïde fait avec le plan COB des deux autres conjugués. L'aire de la section MPN correspondante à un x quelconque AP sera $\pi.MP.PN\sin\varphi$, φ étant l'angle des diamètres OB, OC. En remplaçant MP, NP par leurs valeurs en x, on trouvera pour expression d'un quelconque des cylindres élémentaires,

$$\frac{\pi bc}{a^2}\sin\theta\sin\varphi(2ax-x^2)\alpha.$$

Le volume cherché V peut donc être représenté comme il suit :

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\sin\theta\sin\varphi\lim\sum(2ax-x^2)\alpha,$$

lorsque x passe de o à d par degrés, égaux ou inégaux, mais infiniment petits, représentés par α.

On aura encore, comme précédemment, d'après le n° 43,

$$\sum (2ax - x^2)\alpha = \frac{d^2(3a - d)}{3};$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi bcd^2(3a - d)}{3a^2} \sin\theta \sin\varphi.$$

Si l'on suppose $d = 2a$, on aura pour expression du volume entier de l'ellipsoïde

$$\frac{4}{3}\pi abc \sin\theta \sin\varphi,$$

ce qui peut être traduit de différentes manières, en observant que $abc \sin\theta \sin\varphi$ mesure le volume du parallélépipède construit sur les trois demi-diamètres conjugués, et que $\pi bc \sin\varphi . 2a \sin\theta$ mesure le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, ayant les arêtes parallèles à AX, et ses bases parallèles à YZ. Une des conséquences de l'expression précédente est que ce parallélépipède et ce cylindre ont leurs volumes constants, quel que soit le système des diamètres conjugués.

L'expression (1) comparée à celle du volume du cône ayant même base que le segment, et son sommet en A, donne un énoncé semblable à celui qu'Archimède a fait connaître dans le cas de l'ellipsoïde de révolution.

On trouverait des résultats analogues aux précédents pour les hyperboloïdes et paraboloïdes quelconques; nous ne croyons pas utile de nous y arrêter.

58. *Onglet cylindrique.* — Considérons un cylindre droit dont la base soit le cercle ABC (*fig.* 21); par un de ses diamètres AB, menons un plan qnelconque qui coupe la surface du cylindre suivant l'ellipse ABD, et proposons-

nous de calculer le volume de l'onglet compris entre ABD et ABC.

Supposons le rayon OC perpendiculaire à AB; D le point de rencontre du plan sécant et de l'arête menée en C; soient $OC = R$, $CD = h$.

Suivant la méthode générale, nous regarderons le volume comme limite d'une somme de cylindres ayant pour bases un système de sections parallèles, et nous prendrons ces plans perpendiculaires à AB.

Soit MPQ un quelconque de ces plans; faisons $AP = x$, $PQ = y$, on aura

$$y^2 = 2Rx - x^2 \quad \text{et} \quad MQ : y :: CD : OC,$$

d'où

$$MQ = \frac{hy}{R}.$$

La section MQP a donc pour mesure

$$\frac{hy^2}{2R}, \quad \text{ou} \quad \frac{h}{2R}(2Rx - x^2).$$

Si donc nous désignons par α la distance infiniment petite du plan de cette section au suivant, le volume cherché V aura pour mesure

$$V = \frac{h}{2R} \lim \Sigma (2Rx - x^2)\alpha = \frac{2hR^2}{3},$$

et comme $2R^2$ est le rectangle circonscrit à la base ABC de l'onglet, le volume de ce dernier est égal à celui de la pyramide qui aurait ce rectangle pour base et son sommet en D.

CHAPITRE XII.

APPLICATIONS MÉCANIQUES. — DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

59. Nous admettons comme connue la théorie des centres de gravité enseignée dans les cours les plus élémentaires de Statique, et nous nous proposons de la prendre comme un nouvel exemple de l'avantage des méthodes précédentes.

La proposition dont l'application est la plus générale dans la théorie des forces parallèles, et qui découle naturellement du principe du levier, est ce qu'on nomme le *théorème des moments*. On appelle *moment* d'une force par rapport à un plan le produit de cette force par la distance de son point d'application à ce plan. Cela posé, si l'on conçoit un système quelconque de forces parallèles, que l'on considère comme positives celles dont les directions sont dans l'un des sens, et comme négatives celles qui sont dans l'autre, et qu'il en soit de même pour les perpendiculaires abaissées sur un plan choisi arbitrairement, et dont le signe dépendra du côté où elles se trouveront par rapport au plan, le théorème des moments consiste, comme on le sait, en ce que le moment de la résultante des forces parallèles par rapport au plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes. Il résulte de là que les coordonnées rectilignes du point d'application de la résultante s'obtiendront en divisant par la résultante la somme des moments des forces par rapport aux trois plans coordonnés. Ce point d'application de la résultante, que l'on

nomme le centre des forces parallèles, devient le centre de gravité quand ces forces sont des poids; et l'on voit ainsi comment le théorème des moments peut être employé à la détermination des centres de gravité.

Nous allons faire voir comment les considérations infinitésimales s'appliquent aux surfaces planes et aux solides continus, et nous en donnerons quelques exemples pour bien faire comprendre les généralités.

Les principes que nous admettrons comme établis dans la Statique sont les suivants :

Le centre de gravité d'un système quelconque de points situés dans un même plan est compris dans l'intérieur de toute ligne convexe continue qui les renfermerait. Le centre de gravité d'un système quelconque de points est situé dans l'intérieur de toute surface convexe continue qui les renfermerait.

Centres de gravité des aires planes.

60. Considérons une figure plane terminée par des droites ou des courbes quelconques; supposons qu'elle soit homogène, c'est-à-dire que les portions quelconques de cette figure aient les poids proportionnels à leurs aires respectives.

Prenons deux axes de coordonnées x, y dans le plan de la surface. Le centre de gravité étant le point d'application de la résultante de toutes les forces appliquées à tous les points de la surface, proportionnellement aux aires, si l'on décompose la surface en un nombre quelconque de parties, et que l'on considère en tous les centres de gravité de ces parties des forces parallèles, représentées par leurs aires respectives, et dont la résultante sera représentée par l'aire totale et appliquée au centre de gravité cherché; cette aire totale, multipliée par l'abscisse de son centre de gravité,

sera égale à la somme des aires partielles multipliées par les abscisses de leurs centres de gravité. Si les axes ne sont pas rectangulaires, ces produits ne sont pas les moments eux-mêmes, mais proportionnels aux moments, ce qui suffit pour l'exactitude de l'équation. Mais comme il ne serait pas plus facile de trouver les centres de gravité de toutes les parties que de la surface entière, on supposera ces parties infiniment petites; leurs moments le seront, par suite, et par conséquent on pourra leur substituer d'autres infiniment petits, plus simples, assujettis à la seule condition que leurs rapports aient respectivement pour limite l'unité. Mais alors ce sera seulement la limite de leur somme qui sera égale au moment de la résultante et qui, par conséquent, divisée par l'aire de la figure donnée, fera connaître l'abscisse du centre de gravité.

Le mode de décomposition qui se présente de lui-même pour déterminer cette abscisse consiste dans un système de parallèles à l'axe des y, infiniment voisines les unes des autres. Le segment compris entre deux parallèles consécutives peut toujours être considéré comme renfermé dans un contour convexe, dont ses deux bases feraient partie; son centre de gravité sera donc entre ces deux droites, et son abscisse différera d'une quantité infiniment petite des abscisses de chacune d'elles; on peut donc substituer au moment de ce segment le produit de son aire par l'abscisse de l'une ou de l'autre de ces deux parallèles à l'axe des y; car le rapport de ce produit au moment véritable a pour limite l'unité, quand la distance de ces parallèles tend vers zéro. Et, par la même raison, on pourra, dans ce produit, substituer à l'aire du segment celle du parallélogramme ayant l'une des cordes parallèles pour base et sa distance à l'autre pour hauteur.

Donc, si l'on désigne par Y et y les ordonnées des deux points extrêmes de la corde qui correspond à l'abscisse quel-

conque x; par α la partie de l'axe des x interceptée entre deux cordes consécutives; par A l'aire de la figure, et par x_1, y_1 les coordonnées inconnues du centre de gravité, on aura, en supposant, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires,

$$Ax_1 = \lim \sum (Y - y)x\alpha,$$

d'où l'on tirera x_1, si l'on peut déterminer la limite de cette somme, ainsi que A.

On aurait y_1 par un procédé analogue, en décomposant la figure au moyen d'un système de parallèles à l'axe des x. Mais on peut aussi conserver le premier mode, en remarquant que le centre de gravité d'un des éléments ne peut être qu'à une distance infiniment petite de celui du rectangle inscrit ou circonscrit, et que, par conséquent, on peut substituer au moment exact de cet élément le produit de l'aire du rectangle par $\frac{(Y+y)}{2}$, qui peut être pris pour l'ordonnée du centre de ce rectangle. On aura ainsi

$$Ay_1 = \lim \sum \frac{(Y^2 - y^2)}{2}\alpha,$$

et si l'on peut trouver cette limite, y_1 sera déterminé.

61. Cette formule donne lieu à une remarque curieuse. Si l'on multiplie ses deux membres par 2π, il vient

$$2\pi y_1 A = \lim \pi \sum (Y^2 - y^2)\alpha.$$

Or le second membre représente le volume engendré par l'aire en question, tournant autour de l'axe des x. *Le volume engendré est donc égal à l'aire de la figure génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Ce théorème porte le nom de Guldin, quoiqu'il se trouve

clairement énoncé dans les Ouvrages de Pappus, géomètre de l'école d'Alexandrie.

Nous allons donner quelques exemples de ces formules.

62. *Parabole du second ordre.* — Soit l'équation $y^2 = 2px$; et cherchons le centre de gravité du segment CAC′ (*fig.* 22) terminé à la perpendiculaire à l'axe, correspondant à l'abscisse AP $= a$. Les rectangles formés par les cordes parallèles à CC′ ayant tous leurs centres de gravité sur l'axe, leurs moments, par rapport à cet axe, seront nuls; la limite de leur somme le sera donc, et, par suite, on aura

$$y_1 = 0.$$

Le centre de gravité étant sur l'axe, il suffit de connaître son abscisse x_1.

La formule précédente devient, dans le cas actuel,

$$\mathrm{A}x_1 = \lim 2yx\alpha = 2\sqrt{2p}\lim \Sigma x^{\frac{3}{2}}\alpha.$$

Mais, d'après une formule trouvée précédemment (n° **43**), on a entre les limites o et a,

$$\lim \Sigma x^{\frac{3}{2}} a = \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}};$$

donc

$$\mathrm{A}x_1 = \frac{4\sqrt{2p}}{5} a^{\frac{5}{2}}.$$

Or, en faisant BC $= b$, on a

$$\mathrm{A} = \frac{4}{3} ab,$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = \frac{3}{5} a.$$

C'est Archimède qui a découvert cette propriété, même pour un segment de parabole déterminé par une se-

cante quelconque. Le calcul en serait tout à fait le même que celui que nous venons de faire pour une sécante perpendiculaire à l'axe de la courbe.

63. *Paraboles et hyperboles d'ordre quelconque.* — Soit maintenant l'équation $y = px^m$, dans laquelle m désigne un nombre de grandeur et de signe quelconque; on demande le centre de gravité de la surface terminée à cette courbe, à l'axe des x, et à deux perpendiculaires à l'axe des x, correspondant aux abscisses a, a'.

L'application des formules générales donnera

$$Ax_1 = p \lim \Sigma x^{m+1} \alpha, \quad Ay_1 = \frac{p^2}{2} \lim \Sigma x^{2m} \alpha,$$

ou

$$Ax_1 = p \frac{a'^{m+2} - a^{m+2}}{m+2}, \quad Ay_1 = \frac{p^2}{2} \cdot \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{2m+1}.$$

Or nous avons trouvé (n° 43)

$$A = \frac{p(a'^{m+1} - a^{m+1})}{m+1},$$

d'où il résulte

$$x_1 = \frac{m+1}{m+2} \cdot \frac{a'^{m+2} - a^{m+2}}{a'^{m+1} - a^{m+1}}, \quad y_1 = \frac{p(m+1)}{2(2m+1)} \cdot \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{a'^{m+1} - a^{m+1}}.$$

Si m est positif, la courbe est parabolique; et si l'on fait commencer l'aire en question à l'origine, on a $a = 0$; et, en désignant par b' l'ordonnée correspondant à a',

$$x_1 = \frac{m+1}{m+2} a', \quad y_1 = \frac{p(m+1)}{2(2m+1)} a'^m = \frac{(m+1)}{2(2m+1)} b'.$$

Dans la parabole du second degré, $m = \frac{1}{2}$, et l'on trouve

$$x_1 = \frac{3}{5} a', \quad y_1 = \frac{3}{8} b'.$$

Si m est négatif, la courbe est hyperbolique et donne

lieu à une discussion intéressante à laquelle nous ne nous arrêterons pas. On reconnaîtra sans peine que, quand l'abscisse extrême a' croît sans limite, il est possible, suivant la valeur de m, que le centre de gravité s'éloigne indéfiniment de l'axe des y, en tendant vers l'axe des x, ou tende vers une limite déterminée.

64. *Centre de gravité des solides de révolution homogènes.* — Le centre de gravité sera évidemment sur l'axe de révolution; il suffira donc de connaître son abscisse. Pour la trouver, on coupera le solide par des plans infiniment voisins, perpendiculaires à l'axe de révolution que l'on prendra pour axe des x; et en supposant les poids proportionnels aux volumes, le produit du volume total par l'abscisse x_1 du centre de gravité sera égal à la somme des produits des segments compris entre deux plans consécutifs, par l'x du centre de gravité de ce segment, qui est évidemment compris entre les plans de ses bases. Pour simplifier ces produits, on substituera à ce dernier x celui d'une quelconque des bases du segment, ou même tout autre qui en différerait d'une quantité infiniment petite; on remplacera encore le volume du segment par celui du cylindre intérieur ou extérieur. Par là on n'aura altéré le moment du segment infiniment petit du solide que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. La limite de la somme de ces nouveaux produits sera donc égale à la somme des moments eux-mêmes, ou au produit du volume total par x_1; et si l'on connaît cette limite de somme et le volume, on en déduira immédiatement x_1.

Cette proposition est exprimée par la formule suivante

$$\lim \Sigma x y^2 \alpha = x_1 \lim \Sigma y^2 \alpha.$$

65. *Paraboloïde.* — Si la courbe génératrice est une parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$ et tournant autour de l'axe des x, on aura, en remplaçant y par sa valeur

en x,

$$\lim \Sigma x^2 u = x_1 \lim \Sigma x \alpha,$$

et, d'après la valeur générale de $\lim \Sigma x^m \alpha$, cette équation se réduira à la suivante, en désignant toujours par a et a' les abscisses extrêmes,

$$\frac{a'^3 - a^3}{3} = x_1 \frac{a'^2 - a^2}{2},$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3} \frac{a'^2 + aa' + a^2}{a' + a};$$

si $a = 0$, on a

$$x_1 = \frac{2}{3} a',$$

résultat connu d'Archimède.

Le cas où l'on ferait tourner la parabole autour de sa tangente au sommet est renfermé dans le suivant.

66. Généralisons ce résultat en prenant pour courbe génératrice celle dont l'équation est

$$y = px^m,$$

m désignant un nombre quelconque. L'équation générale devient

$$\lim \Sigma x^{2m+1} \alpha = x_1 \lim \Sigma x^{2m} \alpha,$$

ou

$$\frac{a'^{2m+2} - a^{2m+2}}{2m + 2} = x_1 \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{2m + 1},$$

d'où l'on tirera x_1.

On retombe sur le cas précédent en supposant $m = \frac{1}{2}$, $a = 0$, et l'on retrouve

$$x_1 = \frac{2}{3} a$$

On aurait le cas où la parabole tourne autour de sa tangente au sommet, en supposant $m = 2$, ce qui donne, en

prenant encore $a = 0$,

$$x_1 = \frac{5}{6} a'.$$

67. *Ellipsoïde.* — En prenant pour équation de la courbe génératrice

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

l'équation qui doit donner x_1 sera

$$\lim \Sigma x \left(\frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) \alpha = x_1 \lim \Sigma \left(\frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) \alpha,$$

ou

$$\frac{2b^2}{a} \lim \Sigma x^2 \alpha - \frac{b^2}{a^2} \lim \Sigma x^3 \alpha$$
$$= x_1 \left(\frac{2b^2}{a} \lim \Sigma x \alpha - \frac{b^2}{a^2} \lim \Sigma x^2 \alpha\right).$$

Supposons que nous considérions le volume commençant au sommet et terminé à l'abscisse, nous trouverons, en substituant aux limites de sommes leurs valeurs données par la formule connue, et simplifiant,

$$\frac{2a'^3}{3} - \frac{a'^4}{4a} = x_1 \left(a'^2 - \frac{a'^3}{3a}\right).$$

Si l'on prend le demi-ellipsoïde, on a

$$a' = a, \quad \text{et, par suite,} \quad x_1 = \frac{5}{8} a.$$

Le calcul se ferait d'une manière semblable pour l'hyperboloïde.

68. S'il s'agissait d'un solide homogène terminé par une surface quelconque, on le décomposerait comme il a été fait précédemment pour la mesure des volumes; on considérerait les éléments déterminés par deux séries de plans infiniment voisins, parallèles à deux des plans coordonnés,

et on égalerait la somme de leurs moments par rapport à chacun des trois plans coordonnés, au moment de la résultante par rapport à ces mêmes plans. On négligerait dans chaque moment élémentaire une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; ce qui permettrait de prendre, au lieu du volume de ce filet infiniment étroit, celui du parallélépipède intérieur ou extérieur, et le centre de gravité de ce parallélépipède au lieu de celui du filet même. Si l'on peut trouver les limites de ces trois sommes de moments prises dans toute l'étendue du corps, on obtiendra les trois coordonnées du centre de gravité de ce corps en les divisant par son volume.

On voit donc que la détermination du centre de gravité des corps terminés par des surfaces quelconques se ramène à celle de limites de sommes d'infiniment petits.

CHAPITRE XIII.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE RAPPORTS D'INFINIMENT PETITS.

69. Le point de vue auquel les modernes ont considéré les tangentes aux courbes les a conduits naturellement aux rapports de quantités décroissant indéfiniment. Les anciens regardaient les tangentes comme des lignes telles, qu'à partir du point commun avec la courbe les deux branches de celle-ci se trouvent d'un même côté de la droite ; tandis que les modernes, depuis Descartes, les ont regardées comme limites de sécantes passant par le point donné de la courbe et par un second point de la même courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier. Il est résulté de là, comme nous allons le montrer, que les modernes ont été conduits à la recherche de limites de rapports d'infiniment petits, problème dont les anciens n'ont pas eu occasion de s'occuper.

Les points d'une courbe peuvent être rapportés à des systèmes de coordonnées très-divers, c'est-à-dire déterminés de bien des manières différentes par les valeurs de quantités variables. Nous allons examiner plusieurs de ces systèmes, et montrer que dans tous les cas la détermination de la tangente revient à celle de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites, dépendant l'une de l'autre d'après les données de la question.

70. *Coordonnées rectilignes.* — Soient M (*fig.* 23) un point donné sur une courbe rapportée à deux axes AX, AY,

AP, MP ses coordonnées x, y; M′ un point de la même courbe, qui se rapproche indéfiniment de M, et dont les coordonnées soient $x+h$, $y+k$; la sécante MM′ coupe l'axe des x en un point S, et la limite R de la position de ce point déterminera la limite de la sécante, ou la tangente. La limite de S sera connue si l'on trouve la limite de PS : or on a la proportion $\frac{y}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{M'H}}{\mathrm{MH}} = \frac{k}{h}$.

Donc, en prenant les limites des deux membres,

$$\frac{y}{\mathrm{PR}} = \lim \frac{k}{h};$$

d'où

$$\mathrm{PR} = \frac{y}{\lim \frac{k}{h}} = y \lim \frac{h}{k}.$$

Donc la détermination de la tangente à la courbe se ramène à celle de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites, qui sont les différences des coordonnées du point donné et d'un point infiniment voisin pris sur la courbe, et qui sont liées l'une à l'autre au moyen de l'équation de la courbe donnée.

Au lieu de déterminer PR ou la *sous-tangente,* on peut chercher l'angle de la tangente avec l'axe des x. Soient θ l'angle des axes, ϖ l'angle cherché, $m = \lim \frac{k}{h}$, on aura, par le triangle MRP,

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)} = \frac{y}{\mathrm{PR}} = m;$$

d'où

$$m \sin\theta \cos\omega - m \sin\omega \cos\theta = \sin\omega,$$

et, par suite,

$$\tang\omega = \frac{m \sin\theta}{1 + m \cos\theta},$$

et, si les axes sont rectangulaires,

$$\operatorname{tang}\omega = m = \lim \frac{h}{k}.$$

Il est inutile de faire remarquer qu'il faut avoir soigneusement égard aux signes des accroissements MH, M'H, sans quoi la sécante MM' et sa limite ne seraient pas du côté où elles doivent être par rapport à MH.

71. *Coordonnées polaires.* — Soient O le pôle (*fig.* 24), OX l'axe, M un point donné sur une courbe dont on a l'équation, et dont les coordonnées sont θ et r; M' un point infiniment voisin; h et k les accroissements de θ et r en passant de M à M': la tangente en M sera la limite de la sécante SMM', et peut être déterminée par la limite de l'angle OMS, qui est la même que celle de MOM', puisque la différence de ces deux angles est MOM' qui tend vers zéro. Soit ω cette limite ou l'angle que fait la tangente avec OM. Décrivons de O avec OM pour rayon l'arc MH, et joignons MH; le triangle MHM' donnera

$$\frac{\sin \mathrm{HM'M}}{\sin \mathrm{HMM'}} = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HM'}}.$$

Observons maintenant que l'angle HM'M a pour limite ω; que l'angle H a pour limite un angle droit, puisque l'angle en O du triangle isoscèle HOM a pour limite zéro; que, par conséquent, la somme des deux angles en M, M' dans le triangle MHM' a pour limite un angle droit, d'où il résulte que les limites de ces deux angles sont complémentaires. D'après cela, en égalant les limites des deux membres de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \lim \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HM'}}.$$

Or on peut, d'après le principe fondamental des infini-

ment petits, remplacer HM par toute autre quantité dont le rapport avec HM ait pour limite l'unité; et l'on a vu, dans la Trigonométrie, que le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité. On peut donc remplacer la corde HM par l'arc dont la valeur est rh, et l'équation précédente devient

$$\operatorname{tang}\omega = \lim \frac{rh}{k} = r \lim \frac{h}{k} = \frac{r}{\lim \frac{k}{h}}.$$

Le problème des tangentes, dans un système de coordonnées polaires, est donc encore ramené à la recherche de la limite du rapport de deux infiniment petits, dépendant l'un de l'autre au moyen de l'équation de la courbe, et qui sont les différences des coordonnées de deux points infiniment voisins appartenant à la courbe.

72. *Troisième système de coordonnées.* — Supposons maintenant les points déterminés par leurs distances à deux points fixes, A, B (*fig.* 25); soient M le point où l'on veut mener la tangente, et dont les deux coordonnées seront $AM = r$, $BM = r'$; M′ un point infiniment voisin ayant pour coordonnées $r + h$, $r' + k$; la tangente sera la limite de la sécante MM′, et peut être déterminée, par exemple, par les angles ω, ω' qu'elle forme respectivement avec MA, MB.

Ayant pris $MH = h$, $MK = k$ dans le sens qui convient au signe, et décrivant de A et B comme centres avec les rayons AH, BK des arcs de cercle, ils se rencontrent en M′. Si l'on joint M′H, M, K′ les angles K et H auront chacun pour limites un angle droit, puisque les arcs KM′, HM′ tendront vers zéro; les angles formés par MM′ en M′ et en M auront, par suite, des limites complémentaires; ces limites pour les angles en M ont été désignées par ω, ω'.

Cela posé, on aura

$$\frac{KM}{MM'} = \frac{\sin MM'K}{\sin K}, \quad \frac{HM}{MM'} = \frac{\sin MM'H}{\sin H},$$

d'où

$$\frac{\sin MM'H}{\sin MM'K} \cdot \frac{\sin K}{\sin H} = \frac{h}{k};$$

en prenant les limites des deux membres,

$$(1) \qquad \frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \lim \frac{h}{k}.$$

Les angles ω, ω' de la tangente avec MA, MB sont donc déterminés dès qu'on connaîtra $\lim \frac{h}{k}$, puisque leur somme est connue.

Le problème des tangentes est donc encore ramené, dans ce nouveau système, à chercher la limite du rapport des différences infiniment petites des coordonnées de deux points de la courbe.

73. Au lieu de déterminer par le calcul les angles ω, ω', entre lesquels on a deux équations, on peut facilement construire la tangente d'après l'équation (1). En effet, si l'on prend sur MA et MB, ou sur leurs prolongements, deux longueurs MS, MK ayant un rapport égal à $\lim \frac{h}{k}$, qu'on élève en S et R des perpendiculaires sur AM, MB, et qu'on joigne leur point de rencontre I à M, la droite IM sera la tangente, car les cosinus des angles IMS, IMR auront pour rapport

$$\frac{MS}{MR} \quad \text{ou} \quad \lim \frac{h}{k}.$$

On aurait pu arriver directement à cette construction sans passer par l'équation (1), et par des considérations qui

se retrouvent souvent dans l'emploi des infiniment petits en Géométrie.

Sur le rayon AM prolongé (*fig.* 26), prenons une quantité constante MP; menons PS parallèle à M'H jusqu'à la rencontre de MM' en S; menons ensuite SQ parallèle à M'K; le quadrilatère MPSQ sera semblable à MHM'K, et l'on aura

$$MP : MQ :: MH : MK :: h : k.$$

A mesure que h et k tendent vers zéro, MQ tend donc vers la valeur finie dont le rapport à MP est la limite de $\frac{k}{h}$. La sécante MM' étant toujours dans la direction de la diagonale MS, la tangente sera la limite de cette direction, c'est-à-dire celle de la diagonale du quadrilatère limite de PMQS. Or les angles P et Q de ce quadrilatère, étant égaux respectivement à H et K, ont pour limites des angles droits. On construira donc facilement le quadrilatère limite quand on connaîtra la limite de $\frac{h}{k}$ ou de $\frac{k}{h}$; car on en déduit immédiatement la limite MR de MQ. Il suffit ensuite d'élever en P et en R des perpendiculaires à AM, MB, et de joindre leur point de rencontre I au point M : cette dernière ligne sera la tangente. Cette construction, obtenue par des considérations différentes, coïncide avec la précédente.

74. *Autre système de coordonnées.* — Supposons actuellement que les points soient déterminés par leur distance à un point fixe O (*fig.* 27), et une abscisse ou une ordonnée par rapport à une ligne fixe quelconque passant par O. Soient A l'origine des abscisses, $AP = x$, $PM = y$, $OM = r$; le point quelconque M sera déterminé par x et r, ou y et r.

Cela posé, M étant un point quelconque d'un lieu, de-

terminé par une relation entre ces coordonnées, on demande de trouver la direction de la tangente en ce point.

Soient $MK = k$, $PP' = h$ les accroissements correspondants de r et x pour passer à un point voisin M′ du lieu, et qu'on portera dans un sens ou dans l'autre, suivant qu'ils seront positifs ou négatifs. Dans le quadrilatère MHM′K, l'angle K tendra vers un angle droit en même temps que h et k vers zéro, et la diagonale MM′ vers la tangente.

Nous nous bornerons ici à l'un des procédés employés dans le cas précédent. Nous prendrons PR constant; par le point S de la sécante correspondant à l'abscisse AR, menons les droites SQ, ST parallèles à M′K, M′H : le quadrilatère MQST sera semblable à MKM′H, et la limite de la direction de sa diagonale MS sera la tangente cherchée. Or on pourra construire le quadrilatère limite si l'on connaît la limite de MQ, PR ou son égal TS étant constant; et comme on a

$$\frac{h}{k} = \frac{TS}{MQ},$$

il s'ensuit que la limite de MQ sera connue si l'on connaît celle du rapport $\frac{h}{k}$. Soit MI la limite de MQ; comme l'angle Q a pour limite un angle droit, le quadrilatère limite sera MIUV, et la diagonale MU la tangente. On voit qu'il suffit, pour la construire, d'élever en I une perpendiculaire à OI, et de chercher son point de rencontre U avec la perpendiculaire à OR. Si les deux coordonnées étaient r et y, au lieu de r et x, le même quadrilatère donnerait des résultats analogues, et la question serait toujours ramenée à trouver la limite du rapport des différences des coordonnées de deux points du lieu, infiniment voisins.

75. *Coordonnées angulaires.* — Considérons encore un système où les points seraient déterminés par deux angles

formés par les droites menées de ces points à deux points fixes. Soient A, B (*fig.* 28) ces points fixes, $MAB = \alpha$, $MBA = \beta$ les deux angles qui déterminent la position d'un point quelconque M; on demande de mener la tangente en M à un lieu déterminé par une relation entre α et β. Soient h et k les accroissements positifs ou négatifs de α et β quand on passe de M en M′, MP égal à une constante arbitraire, PS parallèle à M′U, SQ parallèle à M′K; les quadrilatères MPSQ, MUM′V seront semblables, et la tangente cherchée sera la limite de la direction de la diagonale MS. Pour la connaître, il suffit de déterminer les limites de MQ et des directions PS et QS. Quant à ces dernières, il est évident qu'elles ne sont autres que les directions de BM et AM qui sont les limites de celles de BM′, AM′. Pour avoir la limite MI de MQ, il suffit de connaître la limite du rapport $\frac{MU}{MV}$ qui est égal au rapport $\frac{MP}{MQ}$.

Or

$$\frac{MV}{MA} = \frac{\sin h}{\sin V}, \quad \frac{MU}{MB} = \frac{\sin k}{\sin U};$$

donc

$$\frac{MU}{MV} = \frac{MB}{MA} \cdot \frac{\sin k}{\sin h} \cdot \frac{\sin V}{\sin U} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin k}{\sin h} \cdot \frac{\sin V}{\sin U}.$$

Or les angles V et U ayant pour limite l'angle AMB, on a

$$\lim \frac{\sin V}{\sin U} = 1;$$

de plus

$$\lim \frac{\sin k}{\sin h} = \lim \frac{k}{h},$$

puisque le rapport d'un angle infiniment petit à son sinus a pour limite l'unité. On a donc

$$\lim \frac{MU}{MV} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \lim \frac{k}{h} = \frac{MP}{MI};$$

donc enfin le problème est encore ramené à la recherche de la limite du rapport des différences des coordonnées de deux points, infiniment voisins, du lieu. Quand on l'aura trouvée, on connaîtra MI, et par les points P et I on mènera des parallèles à MA, MB, qui par leur rencontre détermineront un point de la tangente.

On pourrait procéder d'une autre manière, et calculer les angles de la tangente avec les rayons vecteurs, ou les limites des angles VM'M, MM'U. On a, en effet,

$$\frac{\sin VM'M}{\sin V} = \frac{MV}{MM'}, \quad \frac{\sin MM'U}{\sin U} = \frac{MU}{MM'},$$

d'où

$$\frac{\sin VM'M}{\sin MM'U} = \frac{\sin V}{\sin U} \cdot \frac{MV}{MU}:$$

or $\frac{\sin V}{\sin U}$ a pour limite 1; donc, en appelant x, y les angles de la tangente MT avec MA, MB, on aura

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \lim \frac{MV}{MU} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \lim \frac{h}{k},$$

et, comme la somme $x + y$ est connue, le problème est résolu dès que l'on connaît la limite du rapport $\frac{h}{k}$.

De l'existence des tangentes en général.

76. Nous venons de passer en revue un assez grand nombre de systèmes de coordonnées, dont quelques-uns ne sont presque jamais employés; et nous avons reconnu que, dans tous les cas, le problème des tangentes était ramené à la recherche de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites. Le nombre des systèmes que l'on pourrait employer pour la détermination des points sur un plan est illimité, et, par les cas variés que nous avons considérés,

nous avons voulu faciliter les recherches auxquelles d'autres cas peuvent donner lieu. On cherchera toujours à ramener la direction de la sécante à dépendre d'infiniment petits quelconques, dont il soit possible de calculer la limite du rapport, soit que les points du lieu soient déterminés par une équation, soit qu'on connaisse la loi de leur génération, sans en avoir déduit l'équation entre les coordonnées.

Mais, avant d'aller plus loin, il est à propos de s'assurer que le problème dont nous nous occupons a généralement une solution; c'est-à-dire qu'en tout point d'une courbe déterminée par une équation, ou par une loi de construction qui pourrait conduire à une équation entre des coordonnées de nature quelconque, il existe une tangente. En d'autres termes, il faut démontrer que, lorsque deux variables dépendent l'une de l'autre, le rapport des accroissements infiniment petits correspondants de ces variables a en général une limite; car c'est à ce problème de calcul que nous avons ramené le problème géométrique.

Cette proposition importante peut être établie simplement, de la manière suivante.

Théorème général.

77. Soit y une fonction quelconque d'une variable x, assujettie seulement aux conditions suivantes : 1° que, lorsqu'à partir d'une valeur quelconque on donne un accroissement h à x, il en résulte un accroissement unique k de y, qui tende vers zéro, si l'on fait tendre h vers zéro; 2° qu'à partir de toute valeur de x on en puisse prendre une autre qui en diffère d'une quantité finie déterminée telle, que si x varie dans le même sens dans tout l'intervalle compris entre elles, y varie constamment dans un même sens, c'est-à-dire toujours en augmentant, ou toujours en diminuant.

Cela posé, il est facile de démontrer que, sous ces conditions, pour toute valeur de x il existe une limite finie pour le rapport des accroissements infiniment petits correspondants h et k; c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir que des valeurs exceptionnelles de x pour lesquelles ce rapport croisse ou décroisse indéfiniment.

En effet, soient x_0, X deux valeurs de x satisfaisant aux conditions ci-dessus indiquées; y_0, Y les valeurs correspondantes de y; partageons l'intervalle $X - x_0$, positif ou négatif, en n parties égales, que nous désignerons par h, et soient $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ les valeurs correspondantes des accroissements positifs de y, on aura

$$X - x_0 = nh, \quad Y - y_0 = k_1 + k_2, \ldots, k_n;$$

d'où résulte

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + \ldots + \frac{k_n}{h}}{n},$$

c'est-à-dire que le rapport invariable des accroissements finis de x et de y, quand on passe de x_0 à X, est la moyenne arithmétique des rapports $\frac{k_1}{h}, \frac{k_2}{h}, \ldots, \frac{k_n}{h}$, quel que soit le nombre entier n.

Si maintenant on fait croître n indéfiniment, les termes de ces rapports tendront vers zéro; et leur moyenne arithmétique étant toujours égale à la quantité finie $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$, il est impossible que les rapports tendent tous vers zéro, ou qu'ils croissent tous indéfiniment.

Cette conclusion relative à l'intervalle $X - x_0$, pouvant être appliquée à toute partie de cet intervalle, il s'ensuit qu'il est impossible que, dans aucun intervalle fini, la valeur de $\frac{k}{h}$ tende vers zéro ou croisse indéfiniment pour

toutes les valeurs de x. Ce n'est donc que pour des valeurs exceptionnelles et en nombre limité que $\frac{k}{h}$ peut ne pas avoir une valeur finie : ce que nous voulions établir.

78. Nous avons supposé dans ce raisonnement que $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ avait une valeur finie. En ne s'assujettissant pas à cette condition, voyons s'il est possible que toutes les valeurs de $\frac{k}{h}$ tendent vers zéro ou croissent indéfiniment.

Si tous les rapports tendent vers zéro, leur moyenne y tendra nécessairement, et comme elle est constante, elle ne peut être que zéro ; donc $Y - y_0 = 0$ ou $Y = y_0$. Et comme il en sera de même si l'on considère l'intervalle entre x_0 et toute autre valeur choisie entre x_0 et X, il en résulte que toutes les valeurs de y correspondant aux valeurs de x comprises entre x_0 et X sont égales à y_0. La fonction désignée par y ne serait donc autre chose qu'une constante, et l'on voit alors que non-seulement $\frac{k}{h}$ tendra vers zéro, mais qu'il sera toujours rigoureusement nul. Le lieu dont la fonction est l'ordonnée serait donc une droite parallèle à l'axe des x, si x et y sont des coordonnées rectilignes.

Si maintenant tous les rapports $\frac{k}{h}$ croissaient sans limites, les rapports réciproques $\frac{h}{k}$ tendraient tous vers zéro, et le lieu serait une droite parallèle à l'axe des y; auquel cas tous les rapports $\frac{h}{k}$ seraient rigoureusement nuls, et l'on dirait que les rapports $\frac{k}{h}$ sont tous infinis.

Si donc le lieu ne renferme aucune portion de ligne droite parallèle à l'un des axes, il y aura une limite finie pour le rapport de l'accroissement k infiniment petit à l'ac-

croissement correspondant h, pris à partir d'un x quelconque entre x_0 et X, à l'exception peut-être de certaines valeurs particulières; et par conséquent en tous les points d'une courbe il existe en général une tangente.

Les cas exceptionnels où la limite de $\frac{k}{h}$ serait nulle ou infinie correspondraient, dans un système de coordonnées rectilignes, aux points où les tangentes seraient parallèles à l'un ou l'autre des axes; cela résulte de la signification géométrique de la limite de $\frac{k}{h}$ dans un pareil système.

Cette limite n'est pas la même en général pour toutes les valeurs de x; elle est donc une fonction de x. Or il est bon de remarquer que, si cette fonction varie par degrés infiniment petits, en même temps que x, le signe que l'on prend pour h à partir d'un x quelconque n'influe pas sur le résultat.

Supposons, en effet, qu'en prenant toujours h de même signe, par exemple positif, la limite du rapport $\frac{k}{h}$ soit représentée par une fonction $f(x)$ de l'x auquel on a donné l'accroissement h, cette fonction variant infiniment peu en même temps que x. Soit k_1 l'accroissement de y, pour l'accroissement $-h$ donné à x; il s'agit de trouver la limite de $\frac{k_1}{-h}$. Or si, à partir de $x-h$, on donne à la variable l'accroissement $+h$, on revient à x; l'y correspondant à $x-h$ reprenant la valeur primitive augmentera de $-k_1$ et le rapport $\frac{-k_1}{h}$ sera d'autant plus voisin de $f(x-h)$ que h sera plus petit; il en sera donc de même de $\frac{k_1}{-h}$. Mais par hypothèse $f(x-h)$ et $f(x)$ diffèrent d'une quantité infiniment petite, si h est lui-même infiniment petit; donc la limite de $\frac{k_1}{-h}$ est $f(x)$, comme celle de $\frac{k}{h}$.

La limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants est donc indépendante du signe choisi pour h, si $f(x)$ varie par degrés infiniment petits en même temps que x. Et il est évident qu'il en serait autrement si cette condition n'était pas remplie.

Dérivées des fonctions.

79. Cette limite du rapport $\frac{k}{h}$ se nomme la dérivée de la fonction y par rapport à x. Si cette fonction y est représentée par $F(x)$, on représente la dérivée par $F'(x)$. Ainsi dorénavant la signification de cet accent sera définie, pour toute fonction F, par l'équation suivante :

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x).$$

En employant cette nouvelle dénomination, nous pouvons donc dire que le problème des tangentes est ramené à la détermination de la dérivée d'une des coordonnées par rapport à l'autre; et que dans un système de coordonnées rectilignes le coefficient d'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses est la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse.

Les dérivées ont beaucoup d'autres usages que la détermination des tangentes; nous nous bornerons en ce moment à quelques remarques très-simples. Si nous représentons, pour abréger, par k l'accroissement de $F(x)$, correspondant à l'accroissement h donné à x, on aura

$$\lim \frac{k}{h} = F'(x),$$

et par conséquent $\frac{k}{h}$ diffère de $F'(x)$ d'une quantité qui tend vers zéro en même temps que h; la désignant par ω,

on aura

$$\frac{k}{h} = F'(x) + \omega,$$

d'où

$$k = h[F'(x) + \omega] = hF'(x) + h\omega,$$

quel que soit le signe de h.

Ainsi $hF'(x)$ ne diffère de k que d'une quantité infiniment petite par rapport à h ou à k; donc *on pourra substituer $hF'(x)$ à k toutes les fois que k sera un des termes d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petit, dont on cherchera la limite.* Remarquons que $hF'(x)$ est l'accroissement de l'ordonnée de la tangente pour l'accroissement h de l'abscisse. Donc $h\omega$ est la différence des ordonnées de la courbe et de la tangente; elle est, comme on le voit, infiniment petite par rapport à l'accroissement même de l'ordonnée; et il faut remarquer que l'ordonnée peut avoir une direction arbitraire pourvu que ce ne soit pas celle de la tangente elle-même, sans quoi $F'(x)$ ne serait pas une quantité finie et les formules précédentes ne subsisteraient plus. Il résulte de là une grande simplification, parce que la quantité ω serait en général très-compliquée; et en négligeant la quantité $h\omega$, il n'en résulte aucune erreur dans les limites des sommes ou des rapports.

80. La dérivée d'une fonction peut servir à reconnaître dans quel sens varie cette fonction à partir d'une valeur quelconque de la variable dont elle dépend; ce qui est souvent utile. En effet, en désignant toujours par h et k les accroissements correspondants de x et $F(x)$, nous avons trouvé

$$k = h[F'(x) + \omega],$$

ω étant infiniment petit en même temps que h.

Or si $F'(x)$ n'est pas nul pour la valeur x que l'on considère, ω ayant pour limite zéro finira par être constam-

ment au-dessous de $F'(x)$ et le facteur $F'(x) + \omega$ sera de même signe que $F'(x)$. Donc k sera de même signe que h, si $F'(x)$ est positif, et de signe contraire s'il est négatif. Ainsi une fonction croît dans le même sens que la variable pour toutes les valeurs de x qui rendent sa dérivée positive, et en sens contraire pour celles qui la rendent négative.

On reconnaît encore facilement que de deux fonctions de x celle-là croît le plus rapidement avec x dont la dérivée est algébriquement la plus grande.

En effet, soient les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$; k et l leurs accroissements correspondant à l'accroissement h de x; on aura

$$k = h[F'(x) + \omega], \quad l = h[f'(x) + \omega'],$$

ω et ω' étant infiniment petits avec h. On tire de là

$$k - l = h[F'(x) - f'(x) + \omega - \omega'],$$

et puisque l'on suppose $F'(x) - f'(x)$ différent de zéro, le second membre finira par être de même signe que

$$h[F'(x) - f'(x)].$$

Ainsi, en supposant $F'(x) > f'(x)$, on aura $k > l$ si h est positif. Mais si h est négatif, on aura $k < l$.

Dans tout ce qui précède il s'agit de valeurs algébriques, et non de grandeurs absolues.

81. Nous avons vu que le rapport fixe $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ était toujours compris entre le plus petit et le plus grand des rapports $\frac{k}{h}$, quelque près qu'ils soient de leurs limites, et, par conséquent, que ce rapport fixe était compris entre la plus petite et la plus grande de ces limites, qui sont les différentes valeurs que prend la dérivée $F'(x)$ quand x passe de x_0 à X. Si donc la fonction $F'(x)$ est continue, c'est-à-

dire si elle ne peut passer d'une valeur à une autre qu'en passant par toutes les intermédiaires, il y aura entre x_0 et X une certaine valeur de x qui rendra $F'(x)$ égal à la quantité intermédiaire $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$. Désignant cette valeur de x par x_1, on aura ainsi

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=F'(x_1), \quad \text{ou} \quad Y-y_0=(X-x_0)F'(x_1),$$

ce qui revient à dire qu'entre les points de la courbe, dont les coordonnées sont x_0, y_0 et X, Y, il en existe un où la tangente est parallèle à la corde qui joint les points extrêmes.

Remarque. — Cette formule entraîne évidemment cette proposition importante démontrée tout à l'heure, et que nous énoncerons spécialement :

Une expression dont la dérivée par rapport à x est nulle, quel que soit x, est nécessairement constante, c'est-à-dire indépendante de x.

82. L'équation $\frac{k}{h}=F'(x)+\omega$ démontrée, quelle que soit la fonction F, peut se mettre sous la forme

$$k=Mh,$$

M désignant une fonction finie de x et de h qui tend vers $F'(x)$ quand h tend vers zéro.

Si, dans cette fonction M, on changeait x en $x+h_1$, elle subirait un accroissement qui, d'après la proposition générale, serait de la forme M_1h_1, M_1 désignant une fonction de x, h et h_1 qui reste finie, quelque petits que soient h et h_1. Si l'on désigne par k_1 l'accroissement que subit alors k, on aura

$$k_1=M_1hh_1.$$

Si de même on change x en $x + h_2$ dans M_1, il croîtra d'une quantité de la forme $M_2 h_2$, M_2 étant une quantité finie dépendant de x, h, h_1, h_2; désignant par k_2 l'accroissement de k_1, on aurait

$$k_2 = M_2 h h_1 h_2;$$

et l'on pourrait continuer de même indéfiniment.

Si l'on suppose que les accroissements successifs donnés à x soient égaux, on aura

$$k = Mh, \quad k_1 = M_1 h^2, \quad k_2 = M_2 h^3;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

On arriverait ainsi à cette proposition générale :

Un accroissement d'un ordre quelconque d'une fonction, correspondant à un accroissement constant à chaque opération, et infiniment petit du premier ordre, de la variable dont elle dépend, est un infiniment petit d'un ordre égal au nombre de ces opérations.

83. Ces accroissements de différents ordres peuvent facilement être représentés géométriquement par la considération de la courbe dont x et y seraient les coordonnées.

Soient M (*fig.* 29) un quelconque de ces points,

$$h = PP' = P'P'' = P''P''' = \ldots,$$

M', M'', M''',... les points de la courbe correspondant aux points P', P'', P'''.... En prolongeant la corde MM' jusqu'à l'ordonnée suivante en I, on aurait, en menant MH, $M'H'$,... parallèles à AX,

$$M'H = k, \quad IH' = M'H.$$

Mais $M''H'$ n'est autre chose que l'accroissement de y en partant de $x + h$; donc il est ce que devient k quand on y change x en $x + h$, et, par conséquent, $M''H' - M'H$ ou

— IM″ sera l'accroissement de k, que nous avons désigné par k_1.

Si l'on prolongeait maintenant M′M″ jusqu'à l'ordonnée suivante, on aurait une ligne correspondant à IM″, qui serait la valeur de k_1, dans laquelle on changerait x en $x + h$, puisqu'on ferait les mêmes opérations en partant de M′ que l'on avait faites en partant de M. On aurait donc l'accroissement de k_1 ou k_2, en retranchant ces deux lignes, en les affectant du signe convenable, et l'on formerait ainsi les accroissements des divers ordres successifs.

On pourrait prendre une autre représentation géométrique d'une fonction et de ses différences successives $k, k_1, k_2, \ldots$: par exemple, supposer que x représente la longueur de l'arc d'une courbe et y le rayon vecteur correspondant, ou l'inclinaison de la tangente, ou toute autre grandeur dépendant de la longueur x de l'arc; on ferait croître l'arc par degrés égaux entre eux, et l'on considérerait les valeurs correspondantes de y, sur lesquelles on ferait les opérations que nous venons d'indiquer dans le système de coordonnées rectilignes; mais les représentations géométriques seraient beaucoup moins simples.

Du problème réciproque.

84. Dans ce qui précède, nous avons supposé que tous les points d'une courbe étaient donnés, soit par une équation, soit par un mode quelconque de génération, et nous nous proposions de trouver la tangente en un quelconque de ces points. On pourrait réciproquement se donner l'équation générale ou un mode de génération de toutes les tangentes à une courbe inconnue, et se proposer de déterminer le point de la courbe qui se trouve sur une quelconque de ces tangentes. Ce problème inverse se résoudra au moyen de la remarque suivante.

Le point de contact d'une tangente à une courbe quelconque est la limite de son point de rencontre avec une tangente infiniment voisine.

Soient, en effet, TMT′ (*fig.* 30) une tangente fixe, M son point de contact, M′ un point de la courbe, infiniment voisin de M, UM′ la tangente en M′ et I son point de rencontre avec T′T. La corde MM′ tend vers zéro lorsque M′ tend vers sa limite M, et c'est le plus grand côté du triangle MIM′; car, d'après la définition de la tangente, la sécante MM′ tendant vers zéro fait avec la tangente en M ou M′ un angle dont la limite est zéro; l'angle I opposé à MM′ tend donc vers les deux droits, et le côté MM′, opposé au plus grand angle, est le plus grand du triangle. La distance IM, plus petite que MM′, tend donc vers zéro; et, par conséquent, le point fixe M est la limite du point de rencontre I de la tangente en M avec une tangente infiniment voisine.

De là résulte la solution du problème, qui consiste à déduire tous les points d'une courbe de la connaissance de toutes ses tangentes. Pour cela, on considérera l'une quelconque de ces dernières, et l'on cherchera sa rencontre avec une tangente voisine d'après les équations connues de ces lignes, ou d'après la loi donnée de leur construction; on déterminera la limite de ce point lorsque la seconde tangente s'approche indéfiniment de la première : on connaîtra ainsi le point de la courbe qui se trouve sur une tangente quelconque. Le problème revient ensuite à une recherche ordinaire de lieu géométrique.

Il est bien certain que, si l'on admet qu'il y ait une courbe tangente au système des lignes données, on la trouvera par le procédé que nous venons d'indiquer; mais, si l'existence de cette courbe n'était pas admise, il est facile de reconnaître que celle que l'on obtient sera effectivement tangente à toutes les droites du système qui auront des points communs avec elle. En effet, considérons deux de ces droites

telles, que dans le passage continu de l'une à l'autre chacune rencontre toujours celle qui suit, quelque voisine qu'elle en soit; faisons passer une courbe par tous les points de rencontre successifs de chacune d'elles et de celle qui la suit à un intervalle infiniment petit. Cela peut se faire d'une infinité de manières : il suffira que la forme d'équation choisie renferme assez de constantes indéterminées. Or chaque droite est coupée par celle qui la précède et par celle qui la suit en deux points qui sont d'autant plus près du point du lieu limite que les droites sont plus voisines; la distance de ces deux points ou la corde interceptée par la droite dans la courbe variable peut donc devenir moindre que toute grandeur donnée, et, par conséquent, les droites du système sont aussi voisines qu'on voudra d'être tangentes à la courbe variable. Donc, enfin, la limite de cette dernière, ou le lieu des points limites, est tangent à toutes les droites.

Cette proposition est un cas particulier d'une plus générale que nous traiterons avec plus de détail par la suite.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES A QUELQUES EXEMPLES.

85. *Parabole.* — En la rapportant à son axe et à la tangente au sommet, son équation est

$$y^2 = 2px;$$

la valeur de la sous-tangente TP (*fig.* 31), a pour expression, d'après la formule générale,

$$\mathrm{TP} = y \lim \frac{h}{k}.$$

Pour trouver $\lim \frac{h}{k}$, il faut exprimer que l'équation de la courbe est satisfaite par $x + h$, $y + k$, ainsi que par x, y; ce qui donne

$$y^2 = 2px, \quad (y + k)^2 = 2p(x + h),$$

et, en retranchant les termes égaux,

$$2ky + k^2 = 2ph.$$

Divisant par k, il vient

$$2y + k = 2p\frac{h}{k},$$

en prenant les limites des deux membres divisés par 2,

$$y = p \lim \frac{h}{k}, \quad \text{d'où} \quad \lim \frac{h}{k} = \frac{y}{p}.$$

Donc

$$\mathrm{TP} = \frac{y^2}{p} = 2x.$$

La sous-tangente est donc double de l'abscisse du point de contact; ce qui donne une construction très-simple de la tangente.

Si au lieu de la sous-tangente on cherche l'angle MTX, on aura

$$\operatorname{tang} \mathrm{MTX} = \lim \frac{k}{h} = \frac{p}{y};$$

de sorte que, si l'on prend $\mathrm{PN} = p$, l'angle cherché sera égal à PMN; la tangente sera donc perpendiculaire à MN. Cette dernière ligne est donc la normale, et la sous-normale est constante et égale à p; ce qui donne une construction simple de la normale et, par suite, de la tangente.

86. Supposons maintenant la parabole rapportée à sa directrice et son foyer F. Les coordonnées seront un rayon vecteur et une abscisse, et l'équation sera

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

On aura alors $k = h$, et en prenant deux quantités égales quelconques PH, MQ, puis élevant en H et Q des perpendiculaires à AX, FQ, on aura un point S de la tangente. On voit que la ligne MS partage en deux parties égales l'angle de FQ avec une parallèle MI à l'axe, vu l'égalité des deux triangles SMQ, SMI. Cette propriété donne une autre construction fort simple de la tangente.

87. *Ellipse et hyperbole.* — L'ellipse rapportée à ses axes a pour équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Pour avoir la limite du rapport $\frac{k}{h}$, on remplacera x et y par $x+h$, $y+k$, et, en retranchant les deux équations, on aura

$$2a^2yk + a^2k^2 + 2b^2xh + b^2h^2 = 0,$$

et, en divisant par h,

$$(2a^2y + a^2k)\frac{k}{h} + 2b^2x + b^2h = 0.$$

Prenant les limites de tous les termes, on aura, d'après le principe fondamental des limites,

$$2a^2y \lim \frac{k}{h} + 2b^2x = 0;$$

d'où

$$\lim \frac{k}{h} = -\frac{b^2x}{a^2y} = \operatorname{tang}\omega,$$

ω désignant l'angle de la tangente avec l'axe des x.

Le même calcul, fait en partant de l'équation de l'hyperbole $a^2y - b^2x^2 = -a^2b^2$, donnerait évidemment

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

88. Considérons maintenant l'ellipse rapportée à ses deux foyers; son équation sera

$$r + r' = 2a,$$

et l'on aura

$$k = -h.$$

Si donc on prend sur FM prolongé (*fig.* 32) une quantité arbitraire MH; que de M vers F′ on prenne une quantité égale MK; qu'en H et K on élève des perpendiculaires à FM, F′M, et qu'on joigne leur point de rencontre S au point M, on aura la tangente à l'ellipse. Il est évident

qu'elle partage l'angle HMF′ des rayons vecteurs en deux parties égales.

S'il s'agissait d'une hyperbole, on aurait

$$r' - r = 2a, \quad k = h;$$

on devrait donc alors porter au delà de M une longueur MK′ = MH et élever en H et K′ des perpendiculaires aux rayons vecteurs, puis joindre leur point de rencontre S′ au point donné M, et l'on aurait la tangente. On voit qu'elle divise l'angle HMK′ en deux parties égales.

89. *Exemple des coordonnées angulaires.* — Considérons maintenant le système des coordonnées où un point M (*fig.* 33) est déterminé par les angles α, β, que les droites menées de ce point à deux points fixes A, B forment avec AB, et prenons l'équation simple

$$\alpha + \beta = a,$$

qui représente un segment capable du supplément de a, et décrit sur la corde AB. On aura alors

$$k = -h,$$

et l'on devra prendre (n° 74) deux longueurs MP, MI telles, que $\frac{MP}{MI} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{MB}{MA}$, et construire sur elles un parallélogramme MPSI; la diagonale MS sera la tangente. Or les deux triangles AMB, MIS, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables : d'où il suit que l'angle IMS est égal à α, et que MSI ou TMA est égal à β.

La tangente fait donc avec chacun des côtés MA, MB un angle égal à celui que l'autre fait avec la base AB, comme cela est évident par la mesure des angles.

90. *Spirale d'Archimède.* — Soient OX (*fig.* 34) la

direction à partir de laquelle on compte les angles θ; O le pôle, M un point quelconque de la courbe, $OM = r$, et a une ligne donnée; l'équation de cette courbe est

$$r = a\theta;$$

l'angle OMT de la tangente avec OM est donné par la formule générale

$$\operatorname{tang}\omega = r \lim \frac{h}{k}.$$

Or, d'après l'équation de la spirale, on a

$$k = ah;$$

donc, ω étant OMT,

$$\operatorname{tang} OMT = \frac{r}{a} = \theta.$$

Si l'on mène la normale MN et la perpendiculaire NOT à OM, les lignes OT, ON sont, dans le système des coordonnées polaires, la sous-tangente et la sous-normale : dans le cas actuel, on aura

$$OT = r \operatorname{tang} OMT = r\theta, \quad ON = \frac{\overline{OM}^2}{OT} = a.$$

La sous-normale est donc constante, ce qui donne une construction bien simple de la normale et, par suite, de la tangente.

Le rayon vecteur OM augmentant indéfiniment avec θ, et ON restant constant, l'angle OMN tend vers zéro; le rayon vecteur tend donc indéfiniment à être perpendiculaire à la tangente, sans le devenir jamais.

Archimède, au lieu de la sous-normale, avait cherché la sous-tangente; il avait démontré que sa longueur était égale à l'arc de cercle MR décrit de O comme centre avec OM pour rayon, et terminé à l'axe OX, ce qui n'est autre chose que $r\theta$, comme nous l'avons trouvé.

91. *Spirale logarithmique.* — L'équation de cette spirale est, en désignant par m une ligne donnée, par a un nombre que nous supposerons plus grand que l'unité,

$$r = ma^{\theta}.$$

En considérant les valeurs négatives de θ comme devant être portées en sens contraire des positives, on a une infinité de spires convergeant vers le point A (*fig.* 35), qu'on nomme pour cela asymptotique. Les valeurs positives de θ donnent une infinité de spires qui s'agrandissent indéfiniment. Pour avoir l'angle AMT de la tangente avec le rayon vecteur AM, il faut chercher la limite du rapport des accroissements k et h de r et θ, et diviser r par cette limite.

Or on a

$$\frac{k}{h} = ma^{\theta}.\frac{a^h - 1}{h},$$

et nous avons fait voir (n° 36) que la limite d'une expression de la forme $\frac{b^u - 1}{u}$, lorsque u tend vers zéro, est $\frac{\log b}{\log c}$. Il en résulte que $\lim \frac{a^h - 1}{h} = \frac{\log a}{\log e} = la$, en désignant par la caractéristique l les logarithmes pris dans la base de Néper; et, par conséquent, $\lim \frac{k}{h} = ma^{\theta} la$.

On aura donc

$$\text{tang AMT} = \frac{1}{l.a}.$$

Ainsi tous les rayons partant de A sont également inclinés sur la spirale.

Exemple où l'on n'emploie pas l'équation de la courbe.

92. *Cycloïde.* — D'après la génération de cette courbe, nous avons vu (n° 37) qu'il fallait, pour en avoir un point

quelconque M (*fig.* 11), prendre à partir de son origine A une longueur arbitraire AT, tracer le cercle générateur tangent en T à l'axe AB et prendre l'arc TM égal à AT. Ces deux lignes AT et TM constituent bien un système de coordonnées, dans le sens le plus général du mot, et l'équation de la courbe serait TM = AT; mais les équations seraient si compliquées en l'employant pour d'autres courbes que nous n'avons pas dû le considérer dans les méthodes générales exposées précédemment.

Nous avons vu encore que, pour passer du point M à un autre point M′, il suffisait de prendre sur le cercle TM un arc MI, mener par I une parallèle à AB et prendre IM′ = MI.

Cela posé, menons les cordes MI, MM′; la tangente en M à la cycloïde sera la limite de la direction MM′, et la limite de la direction MI sera la tangente au cercle TM. Mais, dans le triangle MIM′, le rapport des sinus des angles en M, M′ est celui des côtés MI, IM′ ou $\frac{M'I}{MI}$; et la limite de ce dernier ne sera pas changée si l'on remplace la corde MI par l'arc de cercle sous-tendu, dont le rapport à la corde a pour limite l'unité. Mais $\frac{M'I}{\text{arc}\,MI} = 1$: donc la limite du rapport des sinus de M et M′ est 1, et par conséquent les limites des sinus sont égales; et comme l'angle I de ce triangle a pour limite celui de la tangente en M au cercle avec MS, il en résulte que les limites des deux angles M, M′ sont égales à la moitié du supplément de ce dernier, ou à l'angle UMQ. Donc MU est la tangente, et MT′ la normale.

93. *Conchoïde.* — Supposons que d'un point donné A (*fig.* 36) on mène à un point quelconque M d'une courbe donnée une droite sur laquelle on porte une longueur con-

stante MN, on formera une nouvelle courbe; on propose de lui mener la tangente NU en un point quelconque N, connaissant la tangente MT au point correspondant M de la première.

Soient M′, N′ deux points correspondants des deux courbes, infiniment voisins de M et N; il s'agit d'avoir la limite de la direction de la droite NN′; décrivons de A comme centre les arcs MH, NK; comme $M'N' = MN$, on aura $HM' = KN'$. Dans les triangles rectilignes MM′H, NN′K, les angles H, K ont pour limites des angles droits; l'angle M′ a pour limite TMA, N′ a pour limite UNA, et c'est ce dernier qu'il faut déterminer.

Or on a

$$\frac{\sin N'}{\sin N} = \frac{NK}{KN'}, \quad \frac{\sin M'}{\sin M} = \frac{MH}{HM'};$$

d'où

$$\frac{\sin N'}{\sin N} : \frac{\sin M'}{\sin M} :: NK : MH :: AN : AM,$$

et passant aux limites,

$$\text{tang UNA} : \text{tang TMA} :: AN : AM.$$

Connaissant tang UNA, on construira facilement la tangente NU.

Lorsque la courbe donnée se réduit à une ligne droite XY, la seconde devient ce qu'on appelle conchoïde, imaginée par Nicomède pour la construction du problème des deux moyennes proportionnelles. Dans ce cas, l'angle TMA (*fig.* 37) est XMA, et sa tangente est $\frac{AB}{BM'}$, AB étant perpendiculaire sur XY. La proportion précédente devient alors

$$\text{tang UNA} : \frac{AB}{BM} :: AN : AM :: AQ : AB;$$

d'où

$$\operatorname{tang} UNA = \frac{AQ}{BM}.$$

Si donc on prend BE = AQ, BME sera l'angle cherché UNA.

94. *Cyssoïde.* — Soient AB (*fig.* 38) le diamètre d'un cercle donné; BU sa tangente en B; AV une sécante quelconque partant de A; M son point de rencontre avec le cercle. Si l'on prend VN = AM, le lieu des points N est la *cyssoïde de Dioclès,* que ce géomètre d'Alexandrie imagina encore pour le problème des deux moyennes.

Soit la sécante infiniment voisine AM'N'V'; NN' sera la sécante à la cyssoïde, et sa limite sera la tangente cherchée.

Décrivons de A comme centre les arcs de cercle M'H, NI, VK; le point, en passant en N', se sera éloigné de A de la quantité KV' + MH, puisqu'on porte, à partir de l'extrémité V', qui s'est éloignée de la quantité de KV', une longueur moindre que AM de MH.

Dans le triangle rectiligne NIN' l'angle I tend vers un angle droit, et par conséquent les deux autres N, N' vers des limites complémentaires; il en sera de même dans les triangles MM'H, NN'I, en H et K. Or on a

$$\frac{\sin N}{\sin N'} = \frac{IN'}{IN} = \frac{HM + KV'}{IN}, \quad \frac{HM}{IN} = \frac{HM}{M'H} \cdot \frac{M'H}{IN} = \frac{MH}{M'H} \cdot \frac{AM'}{AN};$$

$$\frac{KV'}{IN} = \frac{KV'}{KV} \cdot \frac{KV}{IN} = \frac{KV'}{KV} \cdot \frac{AV}{AN}.$$

Considérons maintenant les triangles rectilignes M'HM, KVV', et représentons leurs angles par la seule lettre du sommet; on aura

$$\frac{HM}{M'H} = \frac{\sin M'}{\sin M}, \quad \frac{KV'}{KV} = \frac{\sin V}{\sin V'},$$

Cela posé, désignons par ω la limite de l'angle N′, ou l'angle de la tangente de la cyssoïde avec son rayon vecteur AN, et par θ l'angle MAB; nous trouverons immédiatement, en passant aux limites,

$$\cot\omega = \frac{AM}{AN}\tang\theta + \frac{AV}{AN}\tang\theta = \frac{(AM + AV)}{AN}\cdot\frac{MB}{AM},$$

ce qui se construira facilement.

95. *Quadratrice.* — Soient A (*fig.* 39) le centre d'un cercle, CB un quadrant. Supposons un rayon qui se meuve uniformément de AB en AC, et une ligne qui se meuve parallèlement à AB d'un mouvement uniforme, en partant de cette première position en même temps que le rayon mobile et arrivant en même temps que lui en C; les intersections successives de ces deux lignes mobiles forment un lieu qu'on nomme la *quadratrice :* elle porte le nom de *Dinostrate,* soit que ce géomètre l'ait imaginée, soit seulement qu'il l'ait appliquée à la quadrature du cercle.

Cela posé, proposons-nous de mener la tangente en un point quelconque M de cette courbe. Soit M′ un point infiniment voisin de la même courbe; il s'agit de trouver la limite de la direction MM′, ou la limite de l'angle M′MP. Abaissons M′I perpendiculaire sur MP. D'après la loi du mouvement angulaire de AN, et du mouvement de translation de PM, on aura la proportion

$$M'AM : \frac{\pi}{2} :: P'P : AC :: M'I : AC.$$

Or

$$M'I = M'M \sin M'MI,$$

$$M'M = AM\frac{\sin M'AM}{\sin AM'M};$$

donc

$$\frac{M'I}{\sin M'AM} = \frac{AM \sin M'MI}{\sin AM'M}.$$

Prenons les limites des deux membres. On pourra, sans changer celle du premier, remplacer le sinus par l'angle, et, d'après la première proportion, on trouve pour résultat $\frac{2AC}{\pi}$.

Désignons par ω la limite de l'angle M'MI, celle de AM'M sera PMN — ω, et l'on aura

$$\frac{\sin\omega}{\sin(PMN - \omega)} = \frac{2AC}{\pi AM}.$$

Cette équation donne immédiatement la valeur de tangω; mais elle fournit aussi une construction simple de la tangente, puisque cette ligne divise l'angle connu PMN en deux parties dont le rapport des sinus est connu et égal à celui du cercle au quart de sa circonférence. Il suffit de déterminer un point de cet angle tel, que le rapport des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés de l'angle soit celui de deux lignes données, ce qui n'offre aucune difficulté.

La solution de ce problème dépend, comme on le voit, du rapport de la circonférence au diamètre, ou de la quadrature du cercle.

Lorsque le rayon AN a décrit un angle droit, il est évident que le point M se trouve en C; l'angle PMN devient droit et l'équation ci-dessus devient

$$\text{tang}\,\omega = \frac{2}{\pi},$$

ce qui donne la direction de la tangente en C.

Si l'on voulait connaître la position de M au moment du départ, où les deux droites mobiles se confondent avec AB,

il faudrait chercher la limite de AM quand l'angle NAB tendrait vers zéro. Or on a, pour un point quelconque du lieu, en désignant l'angle NAB par θ et AM par r,

$$r = \frac{2\,\mathrm{AC}}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta}.$$

La limite de r est donc $\frac{2\,\mathrm{AC}}{\pi}$; et, portant cette valeur de A en S, le point S appartiendra à la quadratrice.

Exemples de la determination des points d'une courbe par ses tangentes.

96. Ier Exemple. — On donne deux points fixes B, C (*fig.* 40) sur deux droites indéfinies AX, AY. Une droite MN se meut de manière que l'on ait constamment la proportion BM : MA :: AN : NC. Trouver la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Pour cela on cherchera :

1° La limite du point de rencontre d'une quelconque de ces droites avec les droites infiniment voisines;

2° Le lieu de ces points limites, pour toutes les positions de MN.

1° Soient

$$\mathrm{AC} = a, \quad \mathrm{AB} = b, \quad \mathrm{AN} = u, \quad \mathrm{AM} = v;$$

on aura. pour toutes les positions de MN,

$$b - v : v :: u : a - u, \quad \text{d'où} \quad av + bu = ab,$$

et pour la position M'N' on aura

$$a(v - \mathrm{M'M}) + b(u + \mathrm{NN'}) = ab;$$

d'où résulte

$$b.\mathrm{NN'} - a\mathrm{M'M} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{M'M}}{\mathrm{NN'}} = \frac{b}{a},$$

et le point O′, limite de O, sera déterminé par la limite du rapport $\frac{MO}{ON}$.

Si par M′ on mène une droite M′I parallèle à AX, la limite de $\frac{IO}{ON}$ sera précisément la même que celle de $\frac{MO}{ON}$ ou $\frac{MO'}{O'N}$; et l'on aura cette suite d'égalités

$$\frac{IO}{ON} = \frac{M'I}{NN'} = \frac{M'I}{M'M} \cdot \frac{M'M}{NN'} = \frac{u}{v} \cdot \frac{b}{a};$$

donc

$$\frac{MO'}{NO'} = \frac{bu}{av}.$$

2° Les coordonnées x, y du point O′ ainsi déterminé satisferont aux proportions suivantes :

$$x : u - x :: bu : av$$

et

$$v - y : y :: x : u - x, \quad \text{ou} \quad uy + vx = uv.$$

Éliminant u et v entre ces deux équations et la première $av + bu = ab$, on trouve pour équation du lieu

$$(ay - bx - ab)^2 = 4ab^2x$$

ou

$$(ay - bx)^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0,$$

ce qui détermine une parabole tangente en B et C aux deux droites AY, AX.

97. IIe Exemple. — Une droite mobile NN coupe deux droites fixes AX, AY de telle sorte, que AM + AN soit égale à une constante a. Trouver la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Si l'on pose AN $= u$, AM $= v$, la condition donnée sera

exprimée par l'équation

$$u + v = a.$$

La droite MN est donc déterminée par une équation qui n'est qu'un cas particulier de la précédente, et correspond à $b = a$.

La solution de la question proposée s'obtiendra donc en faisant $b = a$ dans celle de la précédente, ce qui donnera

$$(a + x - y)^2 = 4ax.$$

98. IIIe Exemple. — La droite MN (*fig.* 41) se meut de telle sorte, que le triangle AMN, qu'elle détermine par ses intersections avec les lignes données AX, AY, ait une aire constante; on demande la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Pour cela, il faudra d'abord déterminer la limite I du point où cette droite, dans une quelconque de ses positions, est rencontrée par une droite qui s'en approche indéfiniment, en satisfaisant constamment à la condition de l'aire invariable; et ce point I étant connu, pour une position quelconque de MN, on cherchera le lieu de ces points pour toutes les positions de cette droite.

1° Soit O l'intersection de la droite MN par une autre infiniment voisine M'N'.

Les deux triangles MOM', NON' seront équivalents, et comme ils ont l'angle égal O, on aura

$$\mathrm{MO}.\mathrm{M'O} = \mathrm{NO}.\mathrm{N'O},$$

et passant à la limite,

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \overline{\mathrm{NI}}^2.$$

Le point I est donc le milieu de MN.

2° Pour avoir le lieu des points I relatifs à toutes les positions que prend MN, en supposant que le triangle AMN

soit constant, ou que l'on ait $AM.AN = m^2$, soient x, y les coordonnées de I, on aura

$$AM = 2y, \quad AN = 2x,$$

et par suite

$$4xy = m^2 \quad \text{ou} \quad xy = \frac{m^2}{4}.$$

Le lieu est donc une hyperbole ayant pour asymptotes AX, AY.

99. IVe Exemple. — Une droite MN (*fig.* 42), qui a une longueur constante m, se meut de manière que ses extrémités restent sur les côtés d'un angle droit YAX; on demande la courbe à laquelle elle est toujours tangente.

Soit M'N' une position infiniment voisine de MN, ces lignes se coupent en O, et il s'agit de trouver la limite I de ce point. On la connaîtra si l'on détermine la limite du rapport $\frac{MO}{ON}$, qui ne sera autre que $\frac{IM}{IN}$.

Si de O, comme centre, on décrit les arcs de cercle M'H, NK, on aura $MH = KN'$, puisque $M'N' = MN$; et comme le rapport $\frac{MO}{ON}$ a évidemment la même limite que $\frac{HO}{ON}$, il suffit de connaître cette dernière, qui est la même, d'après les triangles semblables, que celle du rapport des cordes M'H, NK. Or ce dernier est facile à obtenir au moyen des triangles rectilignes infiniment petits MM'H, NN'K. Si l'on désigne leurs angles par la lettre du sommet, on aura

$$\frac{M'H}{MH} = \frac{\sin M}{\sin M'}, \quad \frac{NK}{KN'} = \frac{\sin N'}{\sin N},$$

d'où

$$M'H : NK :: \frac{\sin M}{\sin M'} : \frac{\sin N'}{\sin N}.$$

Mais les angles H et K ayant pour limite des angles droits, les limites des angles aigus sont complémentaires. Ainsi la limite de M′ est le complément de M; d'ailleurs la limite de N′ est MNA : donc la limite de N sera complément de MNA. De sorte qu'en égalant les limites des rapports de la dernière proportion, on aura

$$\lim \frac{M'H}{NK} = \frac{\tang M}{\tang MNA} = \tang^2 M;$$

donc

$$\frac{MI}{IN} = \frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2}.$$

Ceci donne une construction facile du point I; car si l'on abaisse de A une perpendiculaire AP sur MN, le rapport des deux segments NP, PM étant $\frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2}$ sera égal à $\frac{MI}{IN}$ et, par conséquent, NI = MP; le point P détermine donc immédiatement le point I du lieu cherché.

L'équation précédente donne, en remarquant que $\overline{AN}^2 + \overline{AM}^2 = m^2$ et $MI + IN \doteq m$,

$$MI = \frac{\overline{AN}^2}{m}, \quad NI = \frac{\overline{AM}^2}{m},$$

d'où il est facile de déduire les coordonnées x, y du point M, car on a

$$\frac{x}{AN} = \frac{MI}{m}, \quad \frac{y}{AM} = \frac{NI}{m};$$

donc

$$x = \frac{\overline{AN}^3}{m^2}, \quad y = \frac{\overline{AM}^3}{m^2},$$

et l'on aura l'équation entre x, y en éliminant AM, AN

entre ces deux équations et la suivante $\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = m^2$. On trouve immédiatement

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}},$$

qui est l'équation du lieu demandé.

100. Il peut se faire que les considérations géométriques soient moins commodes que le calcul algébrique, et voici la marche qu'il faut suivre alors.

L'équation générale des droites données renferme un paramètre qui change de l'une à l'autre. Soit a ce paramètre; cette équation sera donc de la forme

$$y = x\mathrm{F}(a) + f(a),$$

F et f désignant des fonctions connues.

Changeant a en $a + h$, on aura l'équation d'une droite voisine, qui sera

$$y = x\mathrm{F}(a + h) + f(a + h);$$

l'abscisse du point de rencontre sera donc donnée par l'équation suivante :

$$x[\mathrm{F}(a + h) - \mathrm{F}(a)] + f(a + h) - f(a) = 0.$$

Il faut maintenant faire tendre h vers zéro et chercher la limite de x; ce sera l'abscisse du point cherché, et l'équation de la droite fera connaître par suite l'ordonnée.

Mais si on laissait l'équation sous cette forme, elle n'apprendrait rien en prenant les limites de ses deux membres, puisqu'on ne trouverait autre chose que $0 = 0$. Le plus ordinairement il est facile de voir les réductions qui s'opèrent par les soustractions indiquées, et l'on reconnaît un facteur commun h à tous les termes; en le supprimant et passant aux limites des deux membres, on obtient alors la

valeur limite de x; mais rien n'est plus facile que de formuler le résultat en général. En effet, si l'on divise par h tous les termes de la dernière équation, et qu'on prenne ensuite les limites, on trouvera, d'après la définition et la notation des dérivées des fonctions

$$x\mathrm{F}'(a) + f'(a) = 0.$$

Cette équation, jointe à la première $y = x\mathrm{F}(a) + f(a)$, détermine les deux coordonnées du point du lieu, et l'équation du lieu lui-même résultera de l'élimination de a entre ces deux équations. Si, pour la facilité des calculs, on ne réduisait pas à l'unité le coefficient de y, on aurait trois fonctions de a au lieu de deux, et l'on procéderait d'une manière tout à fait semblable.

Prenons, par exemple, le cas traité précédemment, où les droites mobiles jouissent de la propriété de déterminer sur les côtés d'un triangle YAX des segments dont la somme soit égale à une constante a.

Si l'on désigne par α le segment de l'axe des x, l'autre sera $a - \alpha$, et l'équation générale des droites

$$\alpha y + (a - \alpha)x = \alpha(a - \alpha);$$

changeant α en $\alpha + h$, il vient; en retranchant les deux équations membre à membre,

$$yh - xh = ah - 2\alpha h - h^2,$$

ou, en divisant par h,

$$y - x = a - 2\alpha - h.$$

Cette équation, conjointement avec la première, détermine le point de rencontre qui varie avec h. On aura sa limite en supposant $h = 0$; ce qui réduit la seconde équation à

$$y - x = a - 2\alpha,$$

et l'on voit que c'est comme si l'on avait pris les dérivées par rapport à α dans tous les termes de la première.

L'élimination du paramètre α entre ces deux équations donne l'équation suivante :

$$(a + x - y)^2 = 4ax,$$

qui est celle du lieu, et qui coïncide avec celle qui a été trouvée dans le second exemple. Nous généraliserons ces théories par la suite; nous nous écarterions de notre objet en nous y arrêtant plus longtemps.

CHAPITRE XV.

DE LA LONGUEUR DES LIGNES COURBES, ET DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

101. *Longueur des courbes.* — La notion de longueur est une de celles qui ne sont pas susceptibles de définition; mais, comme nous avons déjà eu plusieurs fois occasion de le dire, ce qu'il est toujours indispensable de définir, c'est l'égalité et l'addition des quantités que l'on considère, sans quoi elles ne pourraient donner lieu à aucune comparaison ni à aucun raisonnement précis.

L'égalité en Géométrie se définit par la possibilité de la coïncidence. Il n'y a donc aucune difficulté à se faire idée de droites égales ou d'arcs égaux dans des cercles de même rayon. L'addition se faisant en portant les lignes à la suite les unes des autres dans des directions arbitraires, on conçoit ce que c'est qu'une ligne brisée double, triple d'une autre, et en général dans un rapport quelconque avec une autre ligne droite ou brisée. Il en est de même pour les arcs de cercles de même rayon, comparés entre eux.

Mais quand il s'agit de lignes courbes quelconques, l'égalité ne peut plus exister, la superposition étant impossible; il peut tout au plus y avoir *équivalence*. Mais qu'est-ce que deux arcs équivalents? et en particulier qu'est-ce que la longueur d'un arc de courbe rapportée à une ligne droite? La définition générale au moyen de laquelle la notion de longueur est ramenée au cas de la ligne droite est la suivante :

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers la

quelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc, et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.

Mais il faut démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de ce polygone tendent vers zéro. Nous pouvons supposer que l'arc soit convexe dans toute son étendue, c'est-à-dire ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points. S'il en était autrement, on le partagerait en plusieurs parties séparément convexes : il en sera de même des polygones inscrits. Cette condition n'est nullement indispensable, mais elle facilite les raisonnements.

Cela posé, concevons d'abord qu'il y ait deux cordes égales inscrites dans l'axe convexe que l'on considère ; puis inscrivons-en deux égales dans chacune des deux subdivisions de cet arc, et de même deux égales dans chacune des nouvelles subdivisions, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que le nombre des côtés soit exprimé par la formule 2^n, n croissant indéfiniment. Le périmètre croîtra constamment et, comme on peut facilement assigner une quantité finie au-dessous de laquelle il reste toujours, il tendra évidemment vers une certaine limite. Il reste à démontrer que tout autre mode de division de l'arc conduirait à la même limite.

Considérons, en effet, deux polygones inscrits ayant les côtés extrêmement petits, l'un appartenant à la série que nous venons de désigner, et le second correspondant à toute autre loi d'inscription; menons des ordonnées par tous les sommets de l'un et de l'autre : les deux périmètres seront partagés par ces ordonnées en un même nombre de parties, et celles qui seront comprises entre deux ordonnées consécutives auront un rapport d'autant plus près de l'unité que les côtés seront plus petits; car leurs directions différeront infiniment peu de celle de la tangente voisine. D'où il suit que le rapport des deux périmètres tend indéfiniment vers l'unité à mesure que les côtés tendent vers zéro. La limite

obtenue par le premier mode de division est donc la même que pour tout autre.

Il est bon d'observer qu'on trouverait encore la même limite si les sommets du polygone n'étaient pas sur la courbe même, mais en étaient infiniment voisins, et que les côtés eussent toujours pour limites de leurs directions celles des tangentes aux points infiniment voisins. On pourrait encore considérer des polygones circonscrits à la courbe; on pourrait même prendre une suite de lignes séparées les unes des autres. Imaginons, par exemple, des parallèles qui coupent l'arc de courbe et soient infiniment voisines les unes des autres; si par chaque point de division on mène une tangente, la suite discontinue des portions de ces tangentes comprises entre le point de contact et la parallèle voisine aura, d'après les raisonnements précédents, la même limite que le périmètre inscrit. Ce procédé a été employé par Fermat. On trouverait encore bien d'autres manières de parvenir à la même limite par des sommes de lignes droites; la seule condition nécessaire est que ces sommes et les périmètres inscrits se composent d'éléments correspondants dont le rapport ait l'unité pour limite.

Remarque. — *Tout polygone circonscrit à un arc de courbe convexe est plus grand que cet arc.* Car, si entre deux points de contact consécutifs quelconques on mène une tangente, il en résultera un polygone circonscrit d'un périmètre moindre que le précédent. En agissant de même pour ce nouveau polygone, et ainsi de suite indéfiniment, le périmètre de ces polygones va toujours en diminuant et a pour limite la longueur de l'arc; donc cette longueur est moindre que celle du polygone circonscrit quelconque d'où l'on était parti. Un raisonnement analogue prouve que *la longueur de l'arc est plus grande que celle de tout polygone inscrit.*

Il résulte de là que tout arc convexe est moindre qu'une

ligne quelconque qui l'enveloppe, en partant des mêmes extrémités. Il suffit en effet de concevoir un polygone circonscrit au premier arc et ayant les côtés assez petits pour n'avoir aucun point commun avec le second et un polygone inscrit à celui-ci et qui enveloppe le premier. Ce dernier sera moindre que celui qui l'enveloppe, comme on le prouve dans la Géométrie élémentaire; donc, à plus forte raison, l'arc inscrit sera moindre que l'arc circonscrit au plus grand polygone.

On verrait de la même manière qu'une courbe convexe fermée est moindre que toute ligne qui l'enveloppe.

Voici encore une remarque qui n'est pas sans utilité. Soient AB (*fig.* 43) un arc convexe quelconque, AC une droite menée de l'extrémité A et ayant même projection AP sur une ligne AU. Si toutes les tangentes de A en B forment avec AU des angles aigus plus petits que CAU, la longueur AC sera plus grande que celle de l'arc AB. En effet, si l'on conçoit un polygone circonscrit à AB et dont les points de contact extrêmes soient A et B, il sera plus grand que l'arc; mais il sera plus petit que AC, car, si par tous les sommets on mène des parallèles à PBC, les parties de AC comprises entre ces parallèles seront plus grandes que les côtés correspondants du polygone, qui font avec AU des angles aigus plus petits : la ligne AC est donc plus grande que l'arc AB.

On verrait semblablement que, si les tangentes en tous les points de A en B font avec AU des angles aigus plus grands que C′AU, la droite AC′ sera plus petite que l'arc AB; car on pourrait inscrire dans l'arc un polygone dont les côtés auraient des directions assez voisines de celle des tangentes pour que leurs angles avec AU fussent plus grands que C′AU. Ce polygone serait alors plus grand que AC′, et, à plus forte raison, l'arc AB le serait aussi.

102. *Aire des surfaces courbes.* — Nous appellerons *aire d'une portion de surface courbe la limite vers laquelle tend celle d'un polyèdre inscrit dont les faces sont infiniment petites dans tous les sens.*

Il est encore nécessaire de démontrer que cette limite existe et est unique, quelles que soient la figure des faces du polyèdre et la loi de leur décroissement. C'est ce que nous allons faire rapidement.

Pour cela il faut admettre la notion du plan tangent à une surface. On démontre dans la Géométrie élémentaire que toutes les tangentes à une surface, menées par un quelconque de ses points, sont dans un même plan, et, par suite, que si par ce point et deux autres infiniment voisins pris sur la surface et non en ligne droite avec lui on fait passer un plan, ce plan tend vers une limite déterminée, à mesure que les deux points variables se rapprochent du premier; ce plan limite, qui contient deux tangentes, et qui, par conséquent, ne diffère pas de celui qui est le lieu de toutes les tangentes, est ce qu'on nomme le *plan tangent.* Au reste, nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

Cela posé, concevons deux polyèdres inscrits dont les faces aient des dimensions infiniment petites, l'un faisant partie d'une première série de faces triangulaires, l'autre d'une série arbitraire. Si par tous les côtés de ces deux polyèdres on abaisse des plans perpendiculaires sur un même plan fixe, les faces se trouveront décomposées en parties planes ayant des projections égales sur le plan fixe, et qui seront, par conséquent, entre elles en raison inverse des cosinus des angles que leurs plans forment avec le plan de projection. Mais ces plans font un très-petit angle entre eux, puisqu'ils ont des directions très-voisines de celle d'un même plan tangent, et la limite de leur angle est zéro; donc la limite du rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux surfaces polyédriques est l'unité; donc, si

l'une des surfaces tend vers une limite, l'autre tendra vers la même.

103. Les mêmes raisonnements prouveraient que l'aire d'un polyèdre circonscrit dont les faces ont des dimensions tendant vers zéro a la même limite que les polyèdres inscrits. Et il n'est pas même nécessaire qu'il y ait continuité dans sa surface; on pourrait, par exemple, concevoir deux séries de plans parallèles infiniment voisins partageant la surface en parties infiniment petites dans tous les sens, puis, par un point pris dans chacune de ces parties, mener un plan tangent terminé aux quatre plans entre lesquels se trouve le point de contact. La surface discontinue formée par l'ensemble de ces parallélogrammes tangents aurait encore la même limite que toutes les précédentes, et l'on pourrait encore varier beaucoup la loi de ces surfaces sans cesser de trouver pour limite l'aire de la surface.

Il suffit donc de démontrer qu'au moyen de l'un de ces procédés, et en suivant une loi particulière, choisie à volonté, on tendrait vers une limite déterminée, pour qu'il soit établi que tout autre procédé et toute autre loi donneraient la même limite. Or c'est ce qu'il est facile de faire voir.

En effet, concevons un plan tel, qu'en y projetant la surface donnée il ne se trouve pas deux de ses points ayant même projection, ce qui est toujours possible en partageant, s'il le faut, cette surface en plusieurs portions. Supposons ensuite une série de plans parallèles entre eux, perpendiculaires au premier et distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite α; puis une seconde série de plans parallèles, distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite β, perpendiculaires au premier plan de projection ainsi qu'à ceux de la première série. La surface se trouvera décomposée en parties dont la projection sera égale

à $\alpha\beta$; et si en un point d'une de ces parties on mène le plan tangent et qu'on désigne par ω l'angle qu'il fait avec le plan de projection, la partie de ce plan comprise entre les quatre plans infiniment voisins qui partent de la base $\alpha\beta$ aura pour mesure $\frac{\alpha\beta}{\cos\omega}$. Elle sera donc égale au volume d'un parallélépipède qui aurait même base $\alpha\beta$ et pour hauteur $\frac{1}{\cos\omega}$. Si donc à chaque point de la surface on fait correspondre sur la même ligne projetante un point ayant pour ordonnée $z = \frac{1}{\cos\omega}$, on engendrera ainsi une seconde surface dont la projection sera terminée au même contour. Le volume compris entre cette surface et le cylindre, qui a pour base sa projection, est, comme nous l'avons vu, la limite de la somme des parallélépipèdes $z\alpha\beta$, dont les bases $\alpha\beta$ sont prises dans toute l'étendue de la base du cylindre; ce volume peut donc être représenté par $\lim \Sigma \frac{\alpha\beta}{\cos\omega}$, cette somme n'étant autre que celle qui se rapporte aux aires des parallélogrammes situés dans les plans tangents à la surface. Donc enfin celle-ci a une limite, comme nous nous proposions de le démontrer.

La définition que nous avons donnée de l'aire des surfaces courbes est donc indépendante de toute loi d'inscription ou de circonscription des faces planes, et conduit à une valeur unique et déterminée, exprimable en unités de surfaces comme les surfaces planes elles-mêmes.

Il est bon de remarquer qu'on trouverait encore la même limite si, au lieu de s'assujettir à prendre des faces planes, on prenait des surfaces courbes variables telles, que, pour les points situés sur une même ligne perpendiculaire au plan fixe de projection, les plans tangents à ces surfaces et à la proposée fissent entre eux des angles infiniment petits; car les faces planes qu'on circonscrirait à ces surfaces au-

raient un rapport aussi près de l'unité qu'on voudrait avec les parties de ces surfaces et de la proposée, correspondant à la même projection sur le plan fixe : on trouverait donc encore la même limite pour leur somme.

Enfin on reconnaîtrait d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les courbes que toute surface convexe est plus petite qu'une surface qui l'enveloppe de toutes parts, ou qui l'enveloppe et est terminée au même contour.

Et de même une surface courbe est moindre qu'une surface plane ayant même projection orthogonale sur un plan, et faisant avec ce plan un angle aigu plus grand que tous ceux que font avec lui les plans tangents à la surface en tous ses points. L'inverse aurait lieu si tous ces derniers angles étaient au contraire plus grands que le premier.

104. *Arcs infiniment petits.* — Un arc qui tend vers zéro finit généralement par être constamment convexe; il est donc plus petit que la somme des tangentes menées à ses extrémités et terminées à leur point de rencontre; d'ailleurs il est plus grand que sa corde. Si donc on prouve que le rapport de cette corde à la somme des tangentes a pour limite l'unité, il en sera de même à plus forte raison du rapport de l'une ou de l'autre de ces deux dernières quantités à la longueur de l'arc. Or, si du point de rencontre on abaisse une perpendiculaire sur la corde, le rapport de chacun de ses segments à la tangente correspondante étant le cosinus d'un angle infiniment petit a pour limite l'unité. Il en est donc de même du rapport de la corde entière à la somme des tangentes. Donc :

On peut substituer à un arc infiniment petit d'une courbe quelconque sa corde ou la somme des tangentes à ses extrémités, toutes les fois que cet arc est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite.

On peut encore substituer à l'arc une seule tangente à

une de ses extrémités, pourvu qu'elle soit terminée à une droite passant par l'autre extrémité, et faisant avec la tangente un angle fini quelconque : car cette tangente et la corde, étant les deux côtés d'un triangle, et comprenant un angle qui tend vers zéro, sont dans le rapport des sinus de deux angles finis qui tendent à être supplémentaires; la limite de leur rapport est donc celui de deux sinus finis égaux, c'est-à-dire l'unité.

105. *Arcs de cycloïde.* — Donnons un exemple simple de l'application de ces principes, et proposons-nous de mesurer un arc de cycloïde. Nous avons vu que la tangente au point M (*fig.* 11) est MU; soit α l'angle qu'elle fait avec DA′ et MK $= y$. La partie de tangente comprise entre les deux ordonnées infiniment voisines MK, M′K′ sera égale à $\frac{MH}{\cos\alpha}$.

Or on a

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}.$$

Pour rentrer dans les procédés employés précédemment, il faut introduire, au lieu de MH, la différence M′H de deux y consécutifs. Le triangle MM′H donne

$$MH = M'H \operatorname{tang} MM'H;$$

et comme la corde MM′ fait un angle infiniment petit avec la tangente, l'angle MM′H diffère infiniment peu du complément de α, et tang MM′H de $\cot\alpha$. Si donc on remplace MH par M′H $\cot\alpha$, on ne l'aura altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; il en sera donc de même pour $\frac{MH}{\cos\alpha}$, et la limite de la somme ne sera pas changée.

D'après les équations ci-dessus, on aura

$$M'H \cot\alpha = \frac{M'H\sqrt{2a-y}}{\sqrt{y}},$$

qui, divisée par $\cos\alpha$, donne

$$\frac{M'H\sqrt{2a}}{\sqrt{y}};$$

et l'arc, pris, par exemple, depuis le sommet D, sera la limite de la somme des expressions de cette forme dans lesquelles y passera par degrés infiniment petits M'H, de zéro à l'ordonnée de l'extrémité de l'arc à mesurer. Supposons que M soit cette extrémité; on aura donc

$$DM = \lim \sqrt{2a}\, \Sigma M'H . y^{-\frac{1}{2}},$$

et, d'après une formule déjà plusieurs fois appliquée, on aura, en désignant par b l'ordonnée de l'extrémité M,

$$DM = 2\sqrt{2ab} = 2MU.$$

Lorsque le point M sera en A, on aura $MU = 2a$, et par conséquent $AD = 4a$, et la longueur de la cycloïde entière ADB sera $8a$.

106. *Surfaces infiniment petites.* — Si l'on considère une surface courbe infiniment petite dans tous les sens et que, par tous les points de son contour, on mène des lignes perpendiculaires à un même plan, il vient d'être démontré que l'aire de cette portion de surface est moindre que celle de la portion du plan tangent faisant le plus grand angle aigu avec le plan de projection, et plus grande que celle du plan tangent faisant le plus petit angle, ces portions de plan étant déterminées par le cylindre projetant. Or ces deux aires planes, étant dans le rapport inverse des cosinus des angles

que les deux plans tangents forment avec le plan de projection, ont pour limite de leur rapport l'unité; donc on peut prendre l'une ou l'autre, ou toute intermédiaire au lieu de l'aire de la surface infiniment petite, pourvu qu'elle soit un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite.

107. *Application à une surface de révolution.* — On coupera cette surface par des plans infiniment voisins perpendiculaires à l'axe, et à chacune des parties comprises entre deux plans consécutifs on substituera la surface du tronc de cône engendré par la portion de tangente à la courbe génératrice, comprise entre les mêmes plans : cette substitution est permise d'après les principes précédents, parce que les plans tangents à ces deux surfaces, aux points ayant même projection, font toujours entre eux des angles infiniment petits. La surface du tronc de cône est le produit du côté par la circonférence décrite par son milieu; mais la limite de la somme ne sera pas altérée en prenant, au lieu du milieu, le point de contact lui-même, qui en est infiniment voisin.

Si donc on désigne par A l'aire cherchée, par y l'ordonnée de la courbe génératrice, par τ la partie de la tangente comprise entre deux ordonnées infiniment voisines, on aura

$$A = 2\pi \lim \Sigma y\tau.$$

On arriverait à ce même résultat en remarquant que la surface comprise entre deux plans est plus grande que celle du tronc de cône décrit par la corde et plus petite que le tronc de cône engendré par la tangente, augmenté de la surface plane engendrée par le prolongement de l'ordonnée jusqu'à la tangente, surface qui est infiniment petite par rapport à la première.

Prenons pour exemple la cycloïde tournant autour de la

angente DA'. Nous avons trouvé tout à l'heure que la valeur e τ pouvait être considérée comme égale à $\frac{M'H\sqrt{2a}}{\sqrt{y}}$, à une uantité près infiniment petite par rapport à τ; donc on ura dans ce cas, en partant du sommet D,

$$A = 2\pi \lim \Sigma \sqrt{2a}\sqrt{y}.M'H = \frac{2\pi\sqrt{2ay^{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi y\sqrt{2ay},$$

y désignant l'ordonnée de l'extrémité de l'arc générateur.

CHAPITRE XVI.

APPLICATIONS MÉCANIQUES.

108. *Vitesse.* — Dans un mouvement uniforme on appelle vitesse l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou le rapport d'un espace quelconque au temps employé à le parcourir.

Dans un mouvement varié continu, c'est-à-dire tel, que dans aucun intervalle de temps, si petit qu'il soit, il ne soit uniforme, on aperçoit facilement qu'il n'y a pas lieu à considérer utilement ce rapport; mais y a-t-il cependant dans un pareil mouvement quelque chose qui ait une telle analogie avec la vitesse dans le mouvement uniforme, et une telle similitude dans la manière de l'employer, qu'il soit convenable de lui appliquer la même dénomination et de généraliser ainsi le sens du mot *vitesse?*

Considérons un point qui se meuve d'une manière quelconque sur une courbe donnée, et supposons que la loi de son mouvement soit déterminée par la fonction F (t) qui, pour une valeur quelconque du temps t, représente la longueur de l'arc AM (*fig.* 44) qui sépare le point M où le mobile se trouve à cette époque d'un point fixe A de la courbe.

Après un certain temps h, il sera parvenu en un autre point N, et le rapport de l'espace parcouru au temps employé, ou $\frac{MN}{h}$, exprimera la vitesse moyenne avec laquelle cet arc a été décrit; c'est-à-dire ce que sera celle qu'il faudrait donner au mobile pour qu'il parcourût d'un mouve-

ment uniforme le même espace MN dans le même temps h.

Si maintenant on suppose que h diminue indéfiniment, la vitesse moyenne $\frac{MN}{h}$, ou

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h},$$

variera en même temps et tendra vers une certaine limite qui ne sera autre chose que la dérivée de F (t) par rapport à t, et que nous appellerons la *vitesse* du mobile au point M.

Ainsi, dans tout mouvement d'un point, on appelle *vitesse* à un instant quelconque la limite de la vitesse moyenne du point dans un intervalle infiniment petit, à partir de cet instant.

109. Si l'on désigne par v la vitesse, on aura

$$\lim \frac{MN}{h} = v = F'(t);$$

d'où il suit que $\frac{MN}{h}$ diffère de v d'une quantité qui tend vers zéro en même temps que h. La désignant par ω, on aura donc

$$MN = h(v+\omega) = vh + \omega h.$$

Donc, toutes les fois que MN devra être employé comme terme d'un rapport ou d'une somme, dont on n'ait à considérer que la limite, on pourra supprimer le terme ωh, qui est infiniment petit par rapport à vh, et prendre vh comme mesure de l'espace MN parcouru dans le temps h; c'est-à-dire que, dans tout mouvement varié, l'espace parcouru est le produit de la vitesse par le temps, pourvu que ce temps soit infiniment petit. Ce que nous avons nommé vitesse joue donc le même rôle dans le mouvement varié que ce que l'on avait d'abord appelé vitesse dans le mouvement uni-

forme, mais à la condition de ne considérer que des espaces infiniment petits.

Si donc on avait à calculer l'espace parcouru pendant un temps fini par un point mobile dont on connaîtrait la vitesse en fonction du temps, il suffirait de chercher la limite de la somme des produits des intervalles infiniment petits dans lesquels on décomposerait ce temps, par la vitesse positive ou négative au commencement de ces intervalles respectifs; car ces produits ne différeraient des espaces réellement parcourus dans les intervalles correspondants que de quantités infiniment petites par rapport à ces espaces mêmes.

C'est cette identité dans l'emploi de la vitesse, pourvu que les temps soient infiniment petits, qui justifie l'extension donnée au sens de ce mot, et non pas seulement le droit que l'on a en général de fixer arbitrairement le sens des mots que l'on introduit.

110. *Accélération.* — Pour ne pas entrer dans des détails trop spéciaux de Mécanique, nous nous bornerons ici à considérer le mouvement varié rectiligne.

Le plus simple de tous les mouvements variés est celui où la vitesse augmente toujours de quantités égales dans des intervalles de temps égaux, quels qu'ils soient. Un pareil mouvement est dit *uniformément accéléré,* et l'on y donne le nom spécial d'accélération à l'accroissement positif ou négatif de la vitesse dans l'unité de temps, ou au rapport d'un accroissement quelconque de la vitesse au temps employé à le produire.

Considérons maintenant un mouvement rectiligne varié, où la vitesse v est représentée par une fonction quelconque $\varphi(t)$ du temps. Soient h un accroissement infiniment petit donné à t; k l'accroissement correspondant de v. Concevons un mouvement uniformément accéléré tel, que dans le

même intervalle de temps h il y aurait le même accroissement de vitesse k; $\frac{k}{h}$ sera l'accélération dans ce mouvement, ou l'accélération moyenne dans le mouvement réel considéré pendant l'intervalle h. La limite de cette accélération moyenne $\frac{k}{h}$, qui est la dérivée de v par rapport à t, est ce que l'on nomme l'*accélération* dans le mouvement donné, à l'instant que l'on considère.

111. Cela posé, $\frac{k}{h}$ ayant pour limite $\varphi'(t)$, on a, en désignant par ω une quantité infiniment petite,

$$\frac{k}{h} = \varphi'(t) + \omega,$$

d'où

$$k = h\varphi'(t) + h\omega.$$

Donc on peut remplacer k par $h\varphi'(t)$ lorsque k est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on considère la limite; et, par conséquent, l'accroissement k de la vitesse s'obtiendra comme dans le mouvement uniformément accéléré, en multipliant l'accélération par l'accroissement du temps, mais à la condition que cet accroissement sera infiniment petit.

On voit par là que l'accroissement de la vitesse dans un temps fini peut être considéré comme la limite de la somme des produits des parties infiniment petites de cet intervalle par les accélérations correspondantes. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant qu'un mouvement varié quelconque peut être considéré comme composé d'une infinité de mouvements uniformément variés.

Lorsque nous avons calculé au contraire l'accroissement de l'espace parcouru, le mouvement était considéré comme composé d'une infinité de mouvements uniformes. Il eût

été inutile, dans ce cas, de pousser l'approximation plus loin dans les éléments infiniment petits; la limite de la somme aurait été absolument la même.

112. *Poids spécifique et densité dans les substances non homogènes.* — On appelle *poids spécifique* d'une substance homogène son poids sous l'unité de volume, ou le rapport du poids d'un volume quelconque à ce volume. Supposons maintenant une substance non homogène, mais dont la nature varie d'une manière continue; et nous ferons consister cette continuité en ce que, si l'on considère dans le corps deux volumes infiniment petits, égaux et infiniment voisins, le rapport du poids au volume variera infiniment peu de l'un à l'autre. Cela posé, nous appellerons *poids spécifique* en un point donné d'un corps non homogène la limite du rapport du poids au volume d'une partie du corps renfermant ce point, et dont toutes les dimensions tendent indéfiniment vers zéro. Cette limite sera une fonction des trois coordonnées du point. On reconnaîtra facilement, par les mêmes considérations que dans les questions précédentes, qu'un volume infiniment petit du corps aura un poids qui ne différera que d'une quantité infiniment petite, par rapport à lui-même, du produit de ce volume par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points. Cette quantité pouvant être négligée sans erreur dans les résultats des questions qui ne dépendent que des limites des sommes ou des rapports, il s'ensuit que le poids spécifique, tel que nous l'avons défini, joue le même rôle, dans le cas des corps non homogènes, que le poids spécifique défini d'abord dans les corps homogènes; seulement, il ne faut l'appliquer qu'à des volumes infiniment petits dans tous les sens.

Ainsi, par exemple, pour avoir le poids total du corps, il suffira de chercher la limite de la somme des produits des

volumes infiniment petits dans tous les sens, dans lesquels on décomposera le volume du corps, par le poids spécifique de la substance, en un point quelconque de la partie correspondant respectivement à chacun de ces éléments de volume.

En substituant dans ce qui précède les masses au poids, il faudra substituer au poids spécifique la *densité,* et toutes les conséquences précédentes se reproduiront si identiquement, qu'il est inutile de s'y arrêter.

113. *Application aux centres de gravité des corps non homogènes.* — On suppose donnée la fonction des coordonnées qui exprime le poids spécifique en un point quelconque. Il suffira donc de décomposer le corps en éléments infiniment petits dans tous les sens, de prendre pour poids de chacun d'eux le produit de son volume par le poids spécifique rapporté à l'un quelconque de ses points, ou à tout autre point infiniment voisin, lequel pourra aussi être pris comme s'il était le centre de gravité de l'élément lui-même. Il résultera de là, soit dans les poids, soit dans les moments de ces éléments, des erreurs infiniment petites par rapport aux poids et aux moments exacts, et par conséquent la limite de la somme des poids sera le poids même du corps, et la limite de la somme des moments, par rapport à un plan quelconque, sera exactement égale au moment de la résultante. Les trois coordonnées du centre de gravité du corps seront donc encore déterminées par des limites de sommes d'infiniment petits. Seulement il faut remarquer que, dans le cas des corps homogènes, nous avons pu les décomposer en éléments infiniment petits dans deux sens seulement, tandis que les corps non homogènes doivent, en général, être décomposés en éléments infiniment petits dans tous les sens.

CHAPITRE XVII.

REMARQUES ET THÉORÈMES PROPRES A FACILITER L'EMPLOI DES INFINIMENT PETITS.

114. *Des termes que l'on peut négliger dans les équations.* — Lorsque les deux membres d'une équation ont des limites finies, et que ce sont ces limites que l'on a à considérer, on peut évidemment se dispenser de tenir compte des termes dont la limite est zéro, quoiqu'en les supprimant l'équation devienne inexacte. Comme on ne cherche que l'équation aux limites, et qu'elle n'est pas altérée par là, les résultats sont exactement les mêmes, et l'on s'est débarrassé quelquefois d'une multitude de termes très-compliqués. Ainsi *toute suppression ou altération quelconque qui n'a d'autre effet que de faire négliger des termes infiniment petits dans une équation finale dont les deux membres ont des limites finies peut être faite sans aucune erreur dans les résultats.*

115. Si les membres d'une équation avaient des limites égales à zéro, et se composaient d'infiniment petits de différents ordres, par exemple du premier et d'ordres supérieurs, on peut, par la même raison, se borner à écrire les termes du premier ordre. En effet, une équation dont les deux membres ont pour limite zéro n'est pas destinée à rester sous cette forme, puisqu'elle conduirait à l'égalité insignifiante $0 = 0$. On conserve souvent cette forme pour la commodité de l'écriture, mais on doit toujours en revenir aux quantités finies. Si c'est en divisant les deux membres par un infiniment petit du premier ordre, les termes d'or-

dre supérieur au premier conduiront à la limite zéro, ceux du premier à des limites finies, et l'on se retrouve dans le cas précédent. Si cette équation est employée pour donner l'expression d'un infiniment petit au moyen des autres, et que cet infiniment petit doive être un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite, on sait qu'on peut l'altérer, sans erreur dans les résultats, de quantités infiniment petites par rapport à lui-même. On a donc le droit de négliger, dans l'équation d'où l'on tire sa valeur, tous les termes d'un ordre supérieur au sien.

Il est évident que dans cette même équation on peut, au lieu des facteurs infiniment petits du premier ordre, substituer d'autres quantités, dont le rapport avec eux ait pour limite l'unité, ou en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux; car ce n'est qu'ajouter ou supprimer dans les membres de l'équation des termes d'ordre supérieur au premier.

Ces raisonnements s'appliquent également aux équations dont l'ordre le moins élevé est supérieur au premier. On peut généralement se dispenser d'écrire ceux d'un ordre plus élevé que le moindre.

Remarque. — Il y a cependant une attention à avoir : il peut arriver que dans une équation non simplifiée il y ait des termes du premier ordre et d'ordres supérieurs, et qu'après avoir exécuté les opérations indiquées, ceux du premier ordre se détruisent entre eux. Dans ce cas, si l'on a négligé des termes du second ordre, et que pour employer l'équation résultante on divise ses deux termes par un infiniment petit du second ordre, afin de ne pas arriver à $0 = 0$, ou que l'on tire de cette équation la valeur d'un infiniment petit du second ordre, qui doit entrer comme terme d'un rapport ayant une limite finie, il est évident que les résultats sont inexacts, puisque les termes supprimés y auraient introduit des quantités finies.

Si, par exemple, on avait l'équation suivante, dans laquelle h et k désignent des quantités infiniment petites du premier ordre,

$$\begin{aligned}&\sin(x+h)-\sin x+\cos(y+k)-\cos y\\&\quad+k\sin y-h\cos x+\mathrm{A}k^2+\mathrm{B}hk+\mathrm{C}h^2=0,\end{aligned}$$

et que dans les calculs précédents on eût négligé des termes qui en auraient amené du second ordre dans celle-ci, il y aurait erreur dans les résultats si l'on se servait de cette équation pour en tirer la valeur de h ou de k et la substituer dans une autre. Cela tient à ce que non-seulement les quantités finies disparaissent de l'équation, mais qu'il en est de même de celles du premier ordre, et que par conséquent on ne peut en négliger du second.

En effet,

$$\sin(x+h)-\sin x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(y+k)-\cos y=-2\sin\frac{k}{2}\sin\left(y+\frac{k}{2}\right);$$

donc

$$\sin(x+h)-\sin x-h\cos x=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)-h\cos x.$$

Mais, puisque $\sin\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$ ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'une quelconque des deux; donc, en désignant par ω une quantité infiniment petite, on a

$$\sin\frac{h}{2}=\frac{h}{2}+\omega h,$$

et, d'après ce qu'on a vu dans la Trigonométrie élémentaire, ω est du second ordre; de plus, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ diffère de $\cos x$ d'une quantité infiniment petite du premier ordre, d'après le théorème général (n° 79); en la désignant par α,

on peut poser

$$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x+\alpha;$$

donc

$$2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=2\left(\frac{h}{2}+\omega h\right)(\cos x+\alpha)$$
$$=h\cos x+2\omega h\cos x+h\alpha+2\omega h\alpha.$$

En en retranchant $h\cos x$, il reste donc des produits de deux ou de trois infiniment petits, dont le plus grand est du second ordre. Il en serait de même de l'ensemble des trois termes

$$\cos(y+k)-\cos y+k\sin y.$$

Le premier membre de l'équation pouvant ainsi être considéré comme composé de termes du second ordre et d'ordres supérieurs, si l'on néglige des termes du second ordre, qu'on divise ensuite par h^2, ou par tout autre infiniment petit du second ordre, et qu'on passe aux limites, on aura une équation fausse, puisqu'il manquera des termes finis; et, par la même raison, on n'aurait pu l'employer à donner la valeur d'une des quantités qui y entrent.

Triangles infiniment petits.

116. 1° Supposons un triangle ABC dont les trois angles tendent vers les limites α, β, γ et les trois côtés a, b, c vers zéro. Les rapports des côtés auront pour limites les rapports des sinus des angles α, β, γ.

Ainsi, par exemple, on a les équations exactes

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},\quad \lim\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Mais il n'y a aucun inconvénient à écrire

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\quad\text{ou}\quad a=b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

si a est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite; car $\frac{a}{b}$ ayant pour limite $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ en diffère d'une quantité infiniment petite ω et l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \omega \quad \text{ou} \quad a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} + b\omega.$$

Ainsi en prenant, au lieu de a, la partie $\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$, on néglige une quantité infiniment petite par rapport à a, ce qui, dans la question supposée, ne donnera aucune erreur dans les résultats.

Or il y a souvent beaucoup d'avantages à introduire ainsi les angles limites aux angles variables, comme nous le verrons par quelques exemples.

2° Dans un triangle ABC dont l'angle A tend vers un angle droit et les côtés vers zéro, on peut calculer le côté c par la formule

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

au lieu de la formule exacte

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$

car $\cos A$ tend vers zéro : donc $2bc\cos A$ est infiniment petit par rapport à $2bc$, et, à plus forte raison, par rapport à $b^2 + c^2$, qui est toujours plus grand que $2bc$.

Ainsi a^2 diffère de $b^2 + c^2$ d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; ou encore $\frac{a^2}{b^2 + c^2}$ a pour limite l'unité.

D'où il suit que $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ a aussi pour limite l'unité, ainsi que toutes les puissances de ce rapport.

On pourra donc substituer $\sqrt{b^2 + c^2}$ à a toutes les fois que

cette quantité sera un terme d'un rapport ou d'une somme dont on n'a à considérer que la limite.

117. *Ordre infinitésimal de diverses lignes qu'on a souvent à considérer dans un triangle rectangle infiniment petit.*

Soient A (*fig.* 45) l'angle droit du triangle ABC, dont le côté AB ou c est infiniment petit du premier ordre, ainsi que l'angle B; AI la perpendiculaire abaissée de A sur l'hypoténuse. On aura

$$AC = c \tang B, \quad AI = c \sin B, \quad CI = c \sin B \tang B,$$

et comme $\sin B$ et $\tang B$ sont du même ordre que B, puisque leur rapport à B a une limite non-seulement finie, mais encore égale à l'unité, il en résulte que AC et AI sont infiniment petits du second ordre, et IC du troisième.

Calculons maintenant la différence de l'hypoténuse au côté adjacent à l'angle infiniment petit,

$$BC - BA = \frac{c}{\cos B} - c = \frac{2c \sin^2 \frac{B}{2}}{\cos B},$$

et comme $\sin \frac{B}{2}$ est du premier ordre, ainsi que c, il s'ensuit que BC — BA est du troisième ordre.

Le segment CI étant aussi du troisième, on peut se proposer de trouver la limite de son rapport à BC — BA. D'après les formules précédentes, ce rapport a pour valeur $\frac{\sin^2 B}{2 \sin^2 \frac{B}{2}}$; mais la limite ne sera pas changée en substituant à chacun de ces sinus l'arc correspondant dont le rapport à ce sinus est l'unité; on trouve ainsi 2 pour limite de $\frac{CI}{CB - AB}$; de

sorte que, si l'on décrit de B comme centre l'arc AH, $\frac{CH}{CI}$ tend indéfiniment vers $\frac{1}{2}$, et le point H peut être regardé comme le milieu de CI, à une quantité près infiniment petite par rapport à CI. On peut donc regarder CI comme double de la différence BC — BA.

Mais si l'angle A n'était pas droit, ou ne tendait pas vers un angle droit, IH serait infiniment petit par rapport à CI, qui pourrait par conséquent être pris pour la différence BC — BA.

118. *Triangle infiniment petit ayant un côté infiniment petit par rapport à un autre.* — Soit BC (*fig.* 46), infiniment petit par rapport à AB; en abaissant BI perpendiculaire sur AC, $\frac{BI}{AB}$ ou sin A sera plus petit que $\frac{BC}{BA}$ qui, par hypothèse, est infiniment petit; il en sera donc de même de sin A, et, par suite, de l'angle A.

Quant au rapport $\frac{AC}{AB}$, il a nécessairement pour limite l'unité, puisque la différence de ses deux termes est moindre que le troisième côté BC, et que, par hypothèse, ce dernier est infiniment petit par rapport à l'un d'eux.

Corollaire. — L'angle CAB ayant pour limite zéro, il s'ensuit que si l'un de ses côtés tend vers une direction limite, soit que A reste fixe, soit qu'il se déplace, l'autre aura pour limite la même direction.

Et plus généralement, si par un mouvement quelconque deux points A et B (*fig.* 47) se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, de manière que la direction AB tende à être parallèle à une certaine droite fixe; que l'on considère deux points A′, B′, dont les distances respectives à A et B soient infiniment petites par rapport à AB, la direction A′B′ tendra vers la même limite que AB. En effet, il a été prouvé

que l'angle B'AB a pour limite zéro, puisque $\frac{B'B}{AB}$ est infiniment petit; que de plus $\frac{AB'}{AB}$ a pour limite l'unité. De là résulte que $\frac{A'A}{AB'}$ est infiniment petit, puisque, par hypothèse, $\frac{A'A}{AB}$ l'est; donc l'angle A'B'A est infiniment petit; donc enfin les droites A'B', AB font entre elles un angle dont la limite est zéro, et, par conséquent, leurs directions ont la même limite. Cette proposition a des applications assez fréquentes.

119. *Triangle ayant deux angles infiniment petits du premier ordre.* — Soient A et B (*fig.* 48) les deux angles infiniment petits; abaissons CI perpendiculaire sur AB, et cherchons d'abord quelle serait la limite de la position du point C, qui est la même évidemment que celle du point I, si on laissait AB invariable, pendant que les angles tendraient vers zéro.

Or on a

$$\frac{AI}{IB} = \frac{\tang B}{\tang A};$$

donc

$$\lim \frac{AI}{B} = \lim \frac{\tang B}{\tang A} = \lim \frac{B}{A}.$$

Si donc on connaît la limite du rapport des deux angles infiniment petits du même ordre, on aura la limite du sommet C, en partageant AB en raison inverse des angles en A et B.

Supposons maintenant que le côté AB soit lui-même infiniment petit du premier ordre, et proposons-nous d'évaluer la différence entre sa longueur et la somme des deux autres côtés.

Or on a

$$AC - AI = \frac{2\,AI \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos A} \quad \text{et} \quad BC - BI = \frac{2\,BI \sin^2 \frac{B}{2}}{\cos B},$$

et la somme de ces deux différences est la différence cherchée. Mais chacune d'elles est un infiniment petit du troisième ordre au moins, puisque AI et BI sont moindres que AB qui est du premier ordre, et que $\sin^2 \frac{A}{2}$ et $\sin^2 \frac{B}{2}$ sont du second ordre. On peut même dire qu'elles sont précisément du troisième ordre toutes deux, dans le cas supposé où A et B sont du même ordre; car alors les deux segments AI et IB sont dans un rapport fini avec AB, et sont par conséquent du premier ordre. *Il résulte de là que la différence entre* AB *et* AC + CB *est un infiniment petit du troisième ordre au moins.*

Ou, en d'autres termes, cette différence est du même ordre que le cube de l'arc.

L'ordre de cette différence s'élèverait si les angles étaient d'un ordre plus élevé que le côté; il s'abaisserait dans le cas contraire.

120. *Triangle ayant un angle infiniment petit du premier ordre, compris entre deux côtés infiniment petits du premier ordre.* — Soit A (*fig.* 49) l'angle donné; la somme des deux autres a pour limite deux droits. On peut maintenant faire plusieurs suppositions sur les deux côtés donnés.

Si la limite finie de leur rapport est différente de l'unité, la somme des deux angles opposés ayant pour limite deux droits, l'un de ces angles tendra nécessairement vers zéro, l'autre vers deux droits; car, sans cela, le rapport limite de leurs sinus serait nécessairement l'unité, contrairement à la supposition.

Supposons maintenant que la limite de leur rapport soit l'unité. Il peut alors se présenter trois cas.

1° Si leur différence est du second ordre, prenons $AB' = AB$; $B'C$ sera du second ordre. Mais BB' est du second ordre à cause du triangle isoscèle ABB' qui donne $BB' = 2AB \sin \frac{A}{2}$; ainsi BC sera du second ordre, et le rapport $\frac{B'C}{BC}$ a une limite finie quelconque. Or l'angle B' tend vers un angle droit; donc l'angle $B'BC$, et par suite C, a une limite finie qui peut être quelconque et dépend du rapport de CB' à BB'.

2° Supposons que leur différence soit d'un ordre compris entre 1 et 2. Alors BB' étant du second ordre, $B'C$ d'un ordre moindre, et BC le plus grand côté du triangle $BB'C$, comme opposé à l'angle obtus B, il s'ensuit d'abord que BC est du même ordre que $B'C$, et même que leur rapport a pour limite l'unité, puisque leur différence, étant moindre que BB', qui est du second ordre, est infiniment petite par rapport à ces lignes mêmes. De plus le rapport $\frac{BB'}{B'C}$ ayant zéro pour limite, l'angle C tendra vers zéro, et, par suite, l'angle ABC vers deux droits.

3° Soit la différence d'un ordre supérieur à 2. Alors $\frac{B'C}{BB'}$ a pour limite zéro; donc l'angle $B'BC$ a pour limite zéro, et l'angle ABC a la même limite que ABB', ou un droit : il en est de même par suite de l'angle C.

Si l'angle A était d'un ordre quelconque m au lieu d'être du premier comme les côtés, il faudrait, dans ce qui précède, substituer $1 + m$ à 2.

Remarque. — Il est bon de remarquer que dans ces trois cas, c'est-à-dire *toutes les fois que le rapport des deux côtés donnés a pour limite l'unité, le troisième est infiniment petit par rapport aux deux autres, quel que soit m.*

CHAPITRE XVIII.

COURBURE DES ARCS DE COURBES PLANES QUELCONQUES, ET DIVERSES PROPOSITIONS QUI S'Y RAPPORTENT.

121. La courbure d'un arc convexe est l'angle que forment entre elles les directions du premier et du dernier élément de cet arc; c'est l'angle des tangentes extrêmes : il exprime la quantité dont la courbe a successivement dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc. Si cet angle variait proportionnellement à l'arc, on aurait la courbure, pour une unité de longueur, en divisant celle d'un arc quelconque par la longueur de cet arc.

Mais dans une courbe quelconque, si l'on divise cet angle par la longueur de l'arc, on aura seulement la courbure moyenne de cet arc, rapportée à l'unité de longueur, c'est-à-dire celle que l'on trouverait pour un arc égal à l'unité, si la courbure variait proportionnellement à l'arc, comme dans le cercle, et de manière à obtenir la courbure donnée pour une longueur égale à celle de l'arc dont il s'agit.

Cela posé, si, à partir d'un point quelconque d'une ligne courbe, on prend un arc de grandeur arbitraire, sa courbure moyenne variera à mesure que cet arc diminuera indéfiniment; et elle tendra vers une limite déterminée, qu'on appelle *courbure de la ligne* au point que l'on considère. Cette limite est, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, la courbure d'un arc infiniment petit par rapport à l'unité de longueur, cet arc commençant au

point que l'on considère. C'est une notion importante dans l'étendue approfondie de la constitution d'une courbe.

122. Si l'on considère l'inclinaison φ de la tangente sur un axe fixe, comme une fonction de l'arc s pris à partir d'un point fixe quelconque de la courbe, la courbure ω d'un arc h n'est autre chose que l'accroissement de la fonction φ correspondant à l'accroissement h de l'arc s; on a donc

$$\omega = \mathrm{M}h,$$

M étant une quantité finie dépendant de la valeur de s relative à la première extrémité de l'arc, et de sa longueur h.

Si donc dans les deux membres on changeait s en $s + h_1$, et qu'on désignât par ω_1 l'accroissement correspondant de ω, on aurait

$$\omega_1 = \mathrm{M}_1 h h_1.$$

Si $h_1 = h$, on a

$$\omega_1 = \mathrm{M}_1 h^2,$$

et il en serait de même pour les accroissements d'ordre plus élevé, comme nous l'avons vu en général pour toutes les fonctions (n° 82).

123. Dans un cercle, la courbure d'un arc quelconque s'obtiendrait en multipliant celle d'un arc égal à l'unité par la longueur de l'arc donné. Dans une courbe quelconque, il n'en sera plus ainsi évidemment; mais si l'on ne considère qu'un arc infiniment petit, le produit de la courbure, en une de ses extrémités, par sa longueur, en donnera la courbure à une quantité près, infiniment petite par rapport à elle, puisque le rapport de la courbure exacte de cet arc à l'arc même ne diffère que d'une quantité infiniment petite de la limite que nous appelons courbure en un point; de sorte que, si cette courbure d'un arc infiniment petit ne doit

être considérée que comme élément d'une somme dont on cherche la limite, il n'y aura aucune erreur dans le résultat; et, par conséquent, dans la recherche de la courbure d'un arc fini d'une courbe quelconque, on peut agir de la même manière que si c'était un cercle, pourvu qu'on partage cet arc en parties infiniment petites, et que pour chacune d'elles on prenne pour courbure de l'unité de longueur la *courbure* en un quelconque de ses points.

124. Le cercle ayant une courbure constante, il est naturel de le prendre pour terme de comparaison, et de faire connaître la courbure d'une ligne en un de ses points, en donnant le rayon du cercle dont la courbure est la même. Ce cercle se nomme *cercle de courbure,* et son rayon, *rayon de courbure*. Si on le place tangentiellement à la courbe au point que l'on considère, en tournant sa concavité du même côté qu'elle, son centre, considéré relativement à ce point de la courbe, prend le nom de *centre de courbure*.

La courbure d'un cercle en un de ses points, ou la courbure d'un arc de ce cercle égal à l'unité, étant le rapport de l'angle de ses tangentes extrêmes ou de ses normales extrêmes à la longueur même de cet arc, sera égale à l'unité divisée par le rayon du cercle, puisque nous appelons angle le rapport de l'arc au rayon. Il s'ensuit donc que *la courbure d'une ligne quelconque, en un de ses points, est égale à l'unité divisée par le rayon de courbure en ce point.*

125. *Le centre de courbure est la limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines.* — Soient, en effet, M (*fig.* 50) un point quelconque d'une courbe, MT la tangente, M'N la tangente au point infiniment voisin M', O le point de rencontre des normales en M, M'. Les quatre points M, N, M', O seront sur un cercle ayant pour diamètre NO, dont la limite est la même que celle de M

ou M'O. L'arc de ce cercle compris entre M et M' diffère de sa corde et, par suite, de l'arc MM' de la courbe, d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; on pourra donc le remplacer par ce dernier, sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports.

Mais l'angle inscrit MOM' est égal à l'arc de cercle intercepté divisé par le diamètre : il est d'ailleurs égal à TNM'. Donc $\frac{\text{TNM}'}{\text{arc MNM}'} = \frac{1}{\text{NO}}$, l'arc MNM' étant celui du cercle. Le remplaçant par l'arc MM' de la courbe, on aura, en passant aux limites,

$$\lim \frac{\text{TNM}'}{\text{MM}'} = \frac{1}{\lim \text{NO}} = \frac{1}{\lim \text{MO}}.$$

Mais $\lim \frac{\text{TNM}'}{\text{MM}'}$, étant la courbure en M, est égale à l'unité divisée par le rayon de courbure.

On voit donc que la limite de MO est égale au rayon de courbure; et le *centre de courbure en un point quelconque est la limite du point de rencontre de la normale en ce point avec la normale infiniment voisine.*

126. *Les courbures des deux moitiés d'un arc infiniment petit du premier ordre ne peuvent différer que d'un infiniment petit du second.* — Car si h désigne la longueur de cet arc et ω', ω'' les courbures des deux moitiés, on aura

$$\omega' = \text{M}\frac{h}{2},$$

M étant une quantité finie. Mais ω'' n'étant autre chose que la valeur que prend ω' quand on change, dans M, s en $s + \frac{h}{2}$, on aura, par ce qui précède,

$$\omega'' - \omega' = \text{M}'\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

M′ étant une quantité finie. On voit donc que les courbures des deux moitiés d'un arc infiniment petit du premier ordre, ne peuvent différer que d'un infiniment petit du second ordre.

127. *La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du même ordre que le cube de l'arc.* — En effet, l'arc étant compris entre la corde et la somme des tangentes extrêmes diffère de l'une ou de l'autre de ces deux quantités, moins qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre.

Or les angles de la corde avec chacune des tangentes étant moindres que celui des tangentes entre elles, lequel est du même ordre que l'arc, sont au moins de cet ordre infinitésimal. On a donc un triangle dont un côté est infiniment petit, et les angles adjacents sont du même ordre au moins que ce côté; d'où il suit (n° 119) que la différence de ce côté à la somme des deux autres est au moins du même ordre que le cube du côté, ou de l'arc qui est du même ordre que le côté. Il en est donc ainsi, à plus forte raison, de la différence de l'arc à la corde ou à la somme des tangentes. Ces différences seront du troisième ordre si l'arc est du premier.

128. *La différence d'un arc infiniment petit à la tangente menée à l'une des extrémités de l'arc et terminée à l'ordonnée menée par l'autre est de l'ordre du carré de l'arc.*

Soient l'arc MM′ (*fig.* 51), MT sa tangente terminée à l'ordonnée P′M′; il s'agit d'évaluer l'ordre infinitésimal de la différence entre MT et cet arc.

Remarquons d'abord en général que *la portion* M′T *de l'ordonnée est du second ordre;* car on a la proportion

$$\frac{M'T}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin T}; \quad \text{d'où} \quad M'T = \frac{MM' \sin M}{\sin T}.$$

Mais nous avons vu que l'angle M est au moins du même ordre que l'arc ou la corde MM′, et sin T est fini; *donc la partie* M′T *d'une sécante quelconque faisant un angle fini avec la tangente est de l'ordre du carré de* MM′ *ou de l'arc proposé.*

Si maintenant on abaisse M′I perpendiculaire sur MT, MI différera de l'hypoténuse MM′ d'un infiniment petit de l'ordre du cube de MM′ au moins (n° 117); de plus IT est de l'ordre du carré de MM′, puisqu'on a

$$IT = M'T \cos T,$$

et IT, étant la différence de MT à MI, est la différence de MT à l'arc MM′, en négligeant un infiniment petit de l'ordre du cube de MM′; d'où il suit, comme nous l'avons annoncé, que cette dernière différence est de l'ordre du carré de l'arc. Elle sera donc du second ordre si l'on prend l'arc du premier.

Il en serait de même pour la tangente menée au point M′ et terminée à l'ordonnée MP. L'une de ces tangentes est plus grande que l'arc, l'autre plus petite.

129. Remarque. — On peut conclure de ce qui précède que les longueurs des deux normales en M, M′, terminées à leur point de rencontre O, diffèrent d'une quantité qui est au moins du second ordre; car cette différence est la partie d'une de ces normales comprise entre le point M′ et le cercle décrit de O comme centre avec OM pour rayon. Or, ce cercle étant tangent à la courbe en M, il suffit d'appliquer la proposition qui vient d'être démontrée sur M′T. La différence des normales est donc au moins du second ordre. Nous pourrions pousser l'appréciation plus loin.

On peut tirer de là une conclusion qui a quelquefois de l'utilité dans les problèmes de Géométrie : c'est qu'une

courbe dont les normales passent toutes par un même point est nécessairement un cercle. En effet, en partageant un arc fini de la courbe en parties infiniment petites du premier ordre, les accroissements successifs des normales, comptées à partir du point constant de leur rencontre, seront du second ordre, et la limite du rapport de la somme de ces accroissements à la somme des arcs sera zéro. Donc l'accroissement total de la normale est nul, et tous les points du lieu sont également distants du point fixe. Ce lieu est donc un cercle, dont le point fixe est le centre.

130. Considérons un arc infiniment petit a, appartenant à une courbe quelconque, dont les arcs pris à partir d'une origine fixe sont désignés par s; partageons-le en parties égales α, infiniment petites du second ordre, si a est regardé comme du premier; ce qui veut dire que $\frac{\alpha}{a^2}$ tend vers une limite finie, lorsque a tend vers zéro. Désignons par ω la courbure d'un quelconque de ces arcs α, on aura (n° 122)

$$\omega = M\alpha,$$

M désignant une quantité finie.

Comparons maintenant les valeurs extrêmes ω', ω'' de ω. Pour avoir ω', il faudra, dans M, mettre pour s la valeur correspondant à la première extrémité; pour avoir ω'', il faudra changer s en $s+h$, h n'étant autre chose que $a-\alpha$, et par conséquent du premier ordre. M croîtra donc d'une quantité du premier ordre, que l'on pourra désigner par $M_1 a$, M_1 restant fini; d'où il suit

$$\omega'' - \omega' = M_1 \alpha a.$$

Ainsi *la différence des courbures des arcs extrêmes est du troisième ordre.*

131. *Expression de la perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit sur la tangente menée à l'autre extrémité.*

Soient OB (*fig.* 52) la tangente à l'extrémité O de l'arc $OA = a$ infiniment petit du premier ordre, et AB la perpendiculaire, dont nous allons chercher l'expression en fonction de la longueur a de l'arc et de sa courbure Ω, en nous assujettissant à ne négliger que les infiniment petits du troisième ordre. Pour cela nous décomposerons a en parties égales α infiniment petites du second ordre, dont le nombre m croîtra indéfiniment à mesure que a tendra vers zéro.

La relation

$$a = m\alpha$$

donne

$$\frac{1}{m} = \frac{\alpha}{a} \quad \text{ou} \quad m = \frac{a}{\alpha},$$

de sorte que $\frac{1}{m}$ est infiniment petit du premier ordre, et am ou $\frac{a^2}{\alpha}$ est une quantité finie.

Cela posé, soit MN un quelconque des arcs α qui composent OA, et correspondant à $OM = n\alpha$; formons le triangle MNI au moyen de la corde MN, de la parallèle MI à OB et de la perpendiculaire NI; AB sera la somme des m valeurs que prendra NI quand n prendra les m valeurs $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$; c'est-à-dire que l'on aura

$$AB = \Sigma MN \sin NMI,$$

cette somme se rapportant aux m arcs égaux qui composent OA. Remarquons d'abord que si, dans l'expression générale de l'élément $MN \sin NMI$, on considère un terme infiniment petit de l'ordre p, il fournira dans la somme un

terme de l'ordre $p-1$. En effet, on peut le représenter par ka^p, k étant une quantité finie variable. La somme des m valeurs qu'il prend est égale à la somme des facteurs a^p multipliée par une moyenne k_1 entre les premiers facteurs k, c'est-à-dire à $mk_1 a^p$: ce qui est évidemment de l'ordre $p-1$, puisque ma est une quantité finie. Procédons maintenant au calcul de la somme en question, en négligeant dans sa valeur totale les quantités infiniment petites du troisième ordre.

Nous voyons d'abord qu'à ce degré d'approximation nous pouvons substituer l'arc α à sa corde MN, car leur différence est de l'ordre de α^3, c'est-à-dire du sixième, puisque α est du second; et comme l'angle NMI est moindre que l'angle φ que la tangente en M fait avec OB, augmenté de la courbure ω de MN et à plus forte raison moindre que Ω qui est du premier ordre, on voit qu'en prenant α au lieu de la corde MN, on néglige dans l'expression générale de NI une quantité du septième ordre, au moins. Or, d'après la remarque précédente, elle ne pourra donner dans la somme qu'une quantité du sixième ordre : on peut donc la négliger au degré d'approximation que nous nous sommes proposé, et prendre pour valeur de AB l'expression

$$\Sigma\alpha \sin \mathrm{NMI}.$$

On peut encore la simplifier en remplaçant sin NMI par l'angle NMI; car, leur différence étant du troisième ordre, son produit par α sera du cinquième, ce qui ne produirait sur AB qu'une erreur du quatrième. Donc nous pouvons prendre pour NI l'expression plus simple

$$\alpha \mathrm{NMI}.$$

Et même nous pouvons remplacer NMI par φ dont il diffère d'un angle moindre que la courbure de MN, qui est du second ordre; car nous négligeons ainsi dans αNMI une quan-

tité du quatrième ordre qui ne pourrait affecter AB que d'une erreur du troisième ordre, que nous devons négliger. Ainsi, au degré d'approximation demandé, nous pouvons prendre

$$AB = \Sigma\varphi\alpha.$$

Il faut maintenant exprimer φ au moyen de l'arc $OM = n\alpha$, afin de pouvoir effectuer cette sommation.

Cet angle φ n'est autre chose que la somme des courbures ω des n premiers arcs α; et si elles étaient toutes égales à la courbure ω' du premier, φ serait égale à $n\omega'$; or il est facile de voir qu'on peut les considérer ainsi, au degré d'approximation demandé.

En effet, d'après le n° 130, une quelconque des différences $\omega - \omega'$ est un infiniment petit du troisième ordre. Ainsi la différence de φ à $n\omega'$ est égale à n quantités du troisième ordre, et peut se mettre sous la forme Ana^3, A étant fini; or cette quantité est moindre que Ama^3, qui est du second ordre, puisque ma est fini; donc Ana^3 est au moins du second ordre. En prenant donc $\varphi = n\omega'$, l'erreur est du second ordre, et $\varphi\alpha$ est en erreur d'une quantité du quatrième, qui ne produira sur la somme $\Sigma\varphi\alpha$ qu'une erreur du troisième, que nous devons négliger. Nous pouvons donc nous borner à la valeur beaucoup plus simple

$$AB = \Sigma n\,\alpha\omega' = \alpha\omega'\,\Sigma n;$$

mais n passant par toutes les valeurs de o à $m - 1$, on a

$$\Sigma n = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Donc

$$AB = \frac{m(m-1)\alpha\omega'}{2} = (m-1)\omega'\frac{a}{2}.$$

Mais on peut substituer m à $m - 1$, vu qu'il n'en résulte pour AB qu'une erreur du troisième ordre : et par les mêmes

raisons que précédemment, $m\omega'$ ne diffère de la somme des courbures ω des m arcs α que d'une quantité du second ordre. Substituant cette somme Ω à $m\omega'$, il n'en résultera donc sur AB qu'une erreur du troisième ordre et, au degré d'approximation demandé, on aura enfin

$$AB = \frac{a\Omega}{2},$$

ce qui donne le théorème suivant :

La perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit du premier ordre, sur la tangente menée à l'autre extrémité, est égale à la moitié du produit de l'arc par sa courbure, à un infiniment petit près du troisième ordre.

132. *L'angle formé par la corde d'un arc infiniment petit du premier ordre, avec la tangente au milieu de cet arc, est un infiniment petit du second ordre.*

Soient AA′ cet arc, O son milieu, et B′OB la tangente; la corde AA′ fait avec BB′ un angle dont le sinus est égal à la différence des perpendiculaires AB, A′B′, divisée par la corde. Soient Ω, Ω' les courbures des deux moitiés OA, OA′, on aura, d'après le numéro précédent, en désignant par $2a$ la longueur de l'arc AA′,

$$AB = \frac{\Omega a}{2}, \quad A'B' = \frac{\Omega' a}{2};$$

et, par suite,

$$AB - A'B' = (\Omega - \Omega')\frac{a}{2}.$$

Or nous avons vu (n° 122) que la différence des courbures de deux arcs égaux consécutifs, infiniment petits du premier ordre, est du second; donc $\Omega - \Omega'$ est du second ordre et par suite, la différence AB — A′B′ est du troisième : so

rapport AA′ est donc du second. Ainsi le sinus de l'angle de AB avec la tangente au milieu O de l'arc sous-tendu est du second ordre; et par conséquent aussi cet angle lui-même est infiniment petit du second ordre, comme nous l'avions annoncé.

133. Remarques diverses. — Les perpendiculaires AB, A′B′ étant du second ordre, celle qu'on abaisserait du milieu I de AA′ serait aussi du second; il en serait de même évidemment de la perpendiculaire élevée de I sur AA′ et terminée à BB′, ou à la courbe, et encore de la perpendiculaire abaissée de O sur AA′.

Remarquons encore que dans le triangle rectangle OAB, le côté OB et l'angle O étant du premier ordre, la différence de l'hypoténuse OA à OB sera du troisième ordre. Donc aussi *la différence de l'arc* OA *à* OB *sera du troisième ordre.*

Si l'on avait en O (*fig.* 53) une seconde courbe tangente à la première et ayant même courbure en ce point, et que l'on prît un arc $OA_1 = OA$, la perpendiculaire A_1B_1 serait, au troisième ordre près, égale à $\frac{\Omega_1 a}{4}$, Ω_1 étant la courbure de l'arc OA_1, dont le rapport à Ω a l'unité pour limite par hypothèse. Donc la limite du rapport $\frac{A_1B_1}{AB}$ est l'unité, et, par conséquent, la différence de A_1B_1 à AB est infiniment petite par rapport à AB, et, par conséquent, d'un ordre supérieur au second.

De plus, on voit que BB_1 sera au moins du troisième ordre, puisque c'est la différence de OB et OB_1 qui diffèrent des arcs égaux OA, OA_1 de quantités du troisième ordre. Il en résulte que AA_1 est l'hypoténuse d'un triangle dont un côté est d'un ordre supérieur au second, et l'autre au moins du troisième, et, par conséquent, AA_1 est d'un ordre supérieur au second.

Il est encore important de remarquer que la longueur d'une corde AS comprise entre deux courbes ayant même courbure en O, et dont la direction limite fait un angle fini avec la tangente commune en O, est d'un ordre supérieur au second. Car on a

$$AS = AA_1 \frac{\sin A_1}{\sin S};$$

et comme $\sin S$ reste fini, AS est au moins du même ordre que AA_1.

Ainsi, par exemple, si l'on considère le cercle de courbure d'une courbe quelconque, qu'à partir du point de contact on prenne un arc infiniment petit du premier ordre, et que de son extrémité on mène une sécante faisant un angle fini avec la tangente, la partie comprise entre les deux courbes sera d'un ordre supérieur au second.

134. Si l'on mène une tangente parallèle à la corde AA', l'arc MT (*fig.* 53), compris entre son point de contact T et le milieu M de l'arc, ayant pour courbure l'angle de ses tangentes extrêmes, qui est le même que celui de la corde et de la tangente au milieu, sera infiniment petit du second ordre, comme ce dernier; d'où il résulte cette proposition :

L'arc compris entre le milieu d'un arc infiniment petit du premier ordre et le point de contact de la tangente parallèle à la corde de cet arc est infiniment petit du second ordre.

Si sur le milieu I de la corde AA' (*fig.* 54) on élève une perpendiculaire, elle rencontre l'arc en un point P, également distant de A et A'. Or chacune des cordes égales AP, A'P ne différant de l'arc qu'elle sous-tend que d'un infiniment petit du troisième ordre, les deux arcs AP, A'P ne peuvent avoir entre eux qu'une différence du même ordre. Mais cette différence est le double de PM, puisque M est le

milieu de l'arc entier : donc MP est infiniment petit du troisième ordre.

Ainsi :

MT est infiniment petit du second ordre;

MP est du troisième;

et, par suite, TP est du second.

135. Si l'on joint le point I aux points M, T, et qu'on mène les cordes PM, TP, la première sera du troisième ordre et la seconde du second, comme leurs arcs respectifs.

Or nous avons vu que IP est du second : donc *l'angle* PIM *est infiniment petit* (n° 118). Mais dans le triangle TIP les côtés TP, PI étant du même ordre, le rapport des sinus des angles opposés a une limite finie, et, par conséquent, ces deux sinus ont des limites finies ou tendent tous deux vers zéro. Or ce dernier cas ne peut arriver : car il faudrait pour cela que le troisième angle en P tendît vers deux droits ou vers zéro, ce qui n'est pas, puisque la direction TP est infiniment voisine de celle de la tangente en M, et, par conséquent de celle de AA', à laquelle IP est perpendiculaire; donc *l'angle* TIP *a une limite finie*.

Ainsi, *en joignant le milieu de la corde au milieu de l'arc et au point où la tangente est parallèle à la corde, on a deux directions, dont la première a une limite perpendiculaire à la corde, et la seconde oblique.*

136. *Les angles formés par les tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit avec sa corde peuvent être regardés comme égaux et les tangentes comme égales, en négligeant les infiniment petits du second ordre.*

Soient AA' (*fig.* 55) un arc infiniment petit du premier ordre; AV, A'V ses tangentes extrêmes, dont l'angle

extérieur V mesure la courbure de l'arc AA'. La tangente menée au milieu M de cet arc fait avec AV, A'V des angles MTV, MT'V égaux, au second ordre près, comme mesurant les courbures des arcs égaux AM, A'M (n° 126). Or ces deux angles diffèrent des angles respectifs A, A' de l'angle même des deux droites TT', AA', lequel est du second ordre. Donc, comme nous l'avions annoncé, *les angles des tangentes extrêmes avec la corde sont égaux, à un infiniment petit près du second ordre, et donnent la mesure de la demi-courbure de l'arc, à ce même degré d'approximation.*

Cela posé, il est facile de prouver qu'il en est de même des côtés AV, A'V du triangle AVA'. En effet, on a

$$\frac{A'V}{AV} = \frac{\sin A}{\sin A'},$$

et comme la limite de $\frac{\sin A'}{\sin A}$ est la même que celle de $\frac{A}{A'}$, qui est égale à l'unité, il en résulte

$$\lim \frac{A'V}{AV} = 1.$$

Il est facile d'ailleurs d'apprécier l'ordre de la différence A'V — AV. En effet, l'équation précédente donne

$$\frac{A'V - AV}{AV} = \frac{\sin A - \sin A'}{\sin A'} = \frac{2 \sin \frac{A - A'}{2} \cos \frac{A + A'}{2}}{\sin A'},$$

ce qui est une quantité infiniment petite du premier ordre, puisque $\frac{A - A'}{2}$ est du second et $\sin A'$ du premier. Le rapport $\frac{A'V - AV}{AV}$ étant du premier ordre, A'V — AV est du second.

Donc les longueurs des tangentes extrêmes sont égales, au second ordre près.

137. *Les angles inscrits dans un segment dont l'arc est infiniment petit du premier ordre sont égaux, au second ordre près; leurs suppléments mesurent la moitié de la courbure de l'arc, au même degré d'approximation.*

Soient l'arc AA′ (*fig.* 55 *bis*) et un angle inscrit quelconque AMA′. Si l'on mène la tangente TMT′, l'angle UMA′ sera partagé en deux angles, dont l'un mesure la demi-courbure de A′M, et l'autre celle de AM. *Donc l'angle* UMA′ *peut être regardé comme constant et égal à la demi-courbure de* AA′, *au second ordre près.*

L'angle inscrit AMA′ est donc aussi constant, au second ordre près.

138. *Expression du rayon de courbure, au moyen d'infiniment petits du second ordre.* — Considérons une courbe rapportée à un système de coordonnées rectangles x, y, que nous regarderons comme fonctions d'une même variable indépendante t. Désignons par h, k, l les accroissements infiniment petits que prennent x, y et l'arc de la courbe, quand t prend un accroissement α; et par h_1, k_1, l_1 les accroissements de h, k et l correspondant à un nouvel accroissement α donné à t.

Soit M (*fig.* 56) un point quelconque de la courbe; AP, MP ses coordonnées x, y correspondant à la valeur t de la variable indépendante. Lorsque t croît de α, x et y croissent de quantités $PP_1 = h$, $Q_1 M_1 = k$, et déterminent le point M_1 de la courbe, dont les coordonnées seront $AP_1 = x + h$, $P_1 M_1 = y + k$.

Si dans ces fonctions de t on fait encore croître t de α, AP_1 ou $x + h$ prendra un accroissement égal à la somme de ceux que prendront les deux parties x et h, c'est-à-dire $h + h_1$. De même $M_1 P_1$ ou $y + k$ croîtra de $k + k_1$.

Soient

$$P_1P_2 = h + h_1, \quad Q_2M_2 = k + k_1,$$

on aura ainsi un nouveau point M_2 de la courbe.

Prenons $P_1P' = PP_1 = h$, menons M_2I parallèle à AX, et la droite MM_1 qui coupe en M', V' les parallèles à AY partant de P', P_2; on aura

$$P'P_2 = h_1, \quad -M'I = M_2Q_2 - M_1Q_1 = k_1, \quad \overline{M'M_2}^2 = h_1^2 + k_1^2.$$

En négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on peut prendre les cordes MM_1, M_1M_2 au lieu des arcs qu'elles sous-tendent et dont les valeurs sont l, $l + l_1$; on peut donc écrire $MM_1 = M'M_1 = l$, $M_1M_2 = l + l_1$, et par suite $l_1 = M_1M_2 - M_1M'$. Abaissant $M'D$ perpendiculaire sur M_1M_2, on a, au troisième ordre près,

$$M_1D = M_1M_2 - M_1'M' = M_1M_2 - MM_1; \quad \text{donc} \quad M_2D = l_1.$$

Désignant par ω la courbure de l'arc MM_1, on aura $M'M_1M_2 = \omega$ (n° 137), et comme $M'D = M_1M' \sin M'M_1M_2$, on aura

$$M'D = l\omega = \sqrt{h_1^2 + k_1^2 - l_1^2},$$

d'où l'on tire, pour expression de la courbure de l'arc infiniment petit l,

$$\omega = \frac{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 - l_1^2}}{l},$$

et le rayon de courbure R, qui est la limite de $\frac{1}{\omega}$, aura pour expression

$$R = \lim \frac{l^2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 - l_1^2}}.$$

Remarque. — Si l'on mène la tangente MV en M, on aura

$$M_2V' = 2M_1V.$$

En effet, nous avons vu que l'angle $V'M_1M_2$ mesure la

courbure de l'arc MM_1, tandis que VMM_1 n'en mesure que la moitié; on a donc

$$V'M_1M_2 = 2VMM_1,$$

et comparant les valeurs de VM_1, $V'M_2$ dans les triangles MVM_1, $M_1V'M_2$, on trouve immédiatement

$$\lim \frac{M_2V'}{M_1V} = 2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

139. *Si sur deux courbes tangentes on prend, à partir du point de contact, des arcs infiniment petits égaux, la droite qui joint leurs extrémités a pour direction limite celle de la normale commune.*

Soient M (*fig.* 57) le point de contact, $MM' = MM_1$, et supposons d'abord que les deux courbes soient de côtés différents de la tangente commune. Dans le triangle rectiligne $MM'M_1$, la différence des côtés MM', MM_1, que nous considérerons comme infiniment petits du premier ordre, est du troisième ordre, puisque les arcs sont égaux; de plus, l'angle compris M, étant la somme de ceux que chaque corde fait avec la tangente, est aussi du premier ordre (n° 136). Donc les limites des angles M', M_1 sont des angles droits (n° 120), et comme les directions des côtés MM', MM_1 ont pour limite celle de la tangente en M, il en résulte que la limite de la direction de $M'M_1$ est celle de la normale au point M.

Mais si les courbures étaient dans le même sens, les deux arcs MM', MM_1 seraient du même côté de la tangente, et l'angle M serait la différence des deux angles du premier ordre que les cordes font avec la tangente commune. Cet angle pourrait donc ne pas être du premier ordre, comme

dans le cas précédent, et l'on peut craindre que la conséquence ne soit pas la même. Or nous avons démontré que ces angles ne diffèrent des moitiés des courbures des arcs, que de quantités du second ordre. Si donc les courbures des deux courbes en M sont différentes, ce qui est le cas général, les deux angles qui mesurent les courbures des arcs MM′, MM_1 diffèrent d'une quantité du même ordre que ces arcs, puisque les limites finies des rapports de ces angles à la longueur de l'arc sont inégales. Ainsi, en laissant de côté les points particuliers où la courbure est la même, l'angle M sera toujours du premier ordre, et, par suite, les angles M′, M_1 ont pour limites des angles droits. Donc *la limite de la direction* $M'M_1$ *est généralement celle de la normale commune.*

Exemples de la détermination des centres de courbure.

140. *Cycloïde.* — Soit T (*fig.* 58) le point de contact du cercle générateur correspondant au point quelconque M de la cycloïde. Nous savons qu'en prenant sur le cercle un arc infiniment petit MI, menant IM′ parallèle à AB et égal à MI, puis prenant TT′ = MI = IM′, le point M′ appartient à la cycloïde, et T′ est le point de contact correspondant du cercle générateur avec la base.

Cela posé, MT, M′T′ sont deux normales infiniment voisines, et la limite de leur point de rencontre N est, d'après ce qui précède, le centre de courbure de la cycloïde, correspondant au point M.

Or, si l'on joint IT et qu'on mène MK parallèle à AB, on aura HK = TT′, et l'on reconnaît facilement que le rapport de MH à MI et, par suite, à TT′ tend vers l'unité ; car, dans le triangle rectiligne MIH, les deux angles I et H ont une même limite finie. En effet, la corde MI a pour direc-

tion limite celle de la tangente MU au cercle; et la direction IHT a pour limite celle de MT; donc l'angle I du triangle a pour limite TMU. L'angle H du même triangle, ou son égal THK, a évidemment pour limite TMK. Or cet angle est égal à TMU, puisque, d'après les propriétés connues du cercle, MT est la bissectrice de UMK; donc la limite du rapport des côtés MH, MI est l'unité. Il en est donc de même de la limite du rapport de MH à l'arc MI, ou à son égal TT'. Donc la limite du rapport $\frac{MK}{TT'}$ est 2. Mais le rapport $\frac{MK}{TT'}$ est constamment égal à $\frac{MN}{TN}$. Donc la limite de MN est 2MT, et l'on aura le centre de courbure O en prenant TO = TM.

Ainsi dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale.

141. *Ellipse rapportée à ses foyers.* — Soient F, F' (*fig.* 59) les deux foyers, a, b les deux demi-axes, δ, δ' les rayons vecteurs d'un point quelconque M de l'ellipse, M' un second point infiniment voisin de M; MO', M'O' les bissectrices des angles F'MF, F'M'F, qui seront les normales en M, M'. Le rayon de courbure en M sera la limite du rapport $\frac{MM'}{O'}$, puisque l'angle O' des normales est égal à celui des tangentes aux extrémités de l'arc MM'.

Comme nous n'avons en vue qu'une limite de rapports, nous pourrons, d'après les remarques faites précédemment (n° 115), remplacer les quantités infiniment petites par d'autres, dont le rapport avec elles aura l'unité pour limite, et écrire, comme si elles étaient exactes, les équations où elles entreront : nous avons démontré que le résultat cherché $\lim \frac{MM'}{O'}$ n'en sera aucunement altéré. Nous donnons

ainsi un premier exemple de ce moyen si commode de simplification. Rien ne sera plus facile, au reste, que de faire les mêmes calculs en conservant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, l'exactitude absolue des équations.

Les deux triangles F'MI, O'IM' ayant un angle égal, la somme des deux autres est la même de part et d'autre; d'où, en désignant par F' l'angle infiniment petit MF'M', par ω l'angle donné F'MO', et de même par F et ω' les angles MFM', F'M'O',

$$O' - F' = \omega - \omega',$$

et de même

$$O' - F = \omega' - \omega;$$

d'où, en ajoutant,

$$2O' = F + F'.$$

Ainsi, en désignant par R le rayon de courbure cherché, on aura

$$R = \lim \frac{2MM'}{F + F'}.$$

Nous allons calculer les angles F, F' dans les triangles FMM', F'MM', en les substituant à leurs sinus; nous substituerons de même l'arc MM' à sa corde, nous substituerons à la direction de la corde MM' celle de la tangente en M, et aux angles des rayons vecteurs avec MM', les limites de ces angles, c'est-à-dire le complément de ω. Les valeurs de F, F' ainsi calculées ne différeront des véritables que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes, et, par conséquent, la limite du rapport $\frac{MM'}{F + F'}$ ne sera pas altérée.

Nous trouverons de cette manière

$$F = \frac{MM' \cos\omega}{\delta}, \quad F' = \frac{MM' \cos\omega}{\delta'},$$

d'où

$$F + F' = MM' \cos\omega \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right) = \frac{2a\, MM' \cos\omega}{\delta\delta'},$$

et, par suite,

$$R = \frac{\delta\delta'}{a\cos\omega}.$$

Or on sait que $\cos\omega = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}}$, et que la longueur n de la normale MN a pour expression

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'};$$

d'où résultent les formules suivantes :

$$n\cos\omega = \frac{b^2}{a}, \quad \frac{n}{\cos\omega} = \frac{\delta\delta'}{a},$$

$$R = \frac{n}{\cos^2\omega}, \quad R = \frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2n^3}{b^4},$$

ou, en désignant par p le demi-paramètre,

$$R = \frac{n^3}{p^2}.$$

Cette formule s'applique également à l'hyperbole et à la parabole.

Celle de ces formules qui donne pour R la construction la plus facile est $R = \frac{n}{\cos^2\omega}$ qui montre que le rayon de courbure projeté d'abord sur MF′, puis de là sur la normale, donne la longueur même de la normale MN. Il en résulte que si au point N on élève une perpendiculaire à MN; qu'au point H où elle coupe F′M on élève une perpendiculaire à F′M, son point de rencontre C avec la normale sera le centre de courbure.

142. Le théorème suivant a été démontré par Newton. (*Princ.*, section III, prop. 11.)

Si dans la *fig.* 59 on mène M′Q, M′P, la première parallèle et la seconde perpendiculaire à FM, Q étant le point de rencontre de la première avec la tangente en M, et P de la seconde avec FM, on aura

$$\lim \frac{\overline{M'P}^2}{M'Q} = \frac{2b^2}{a}.$$

En effet, la distance infiniment petite de M′ à la tangente peut être considérée comme égale à $\frac{\overline{MM'}^2}{2R}$; donc

$$M'Q = \frac{\overline{MM'}^2}{2R\cos\omega}; \quad \text{d'ailleurs} \quad M'P = MM'\cos\omega.$$

Donc, en ne considérant que la limite du rapport, on peut écrire

$$\frac{\overline{M'P}^2}{M'Q} = 2R\cos^3\omega = 2n\cos\omega = \frac{2b^2}{a}.$$

143. *Spirale logarithmique.* — Soient M, M′ (*fig.* 60) deux points infiniment voisins, A le pôle MO, M′O les deux normales en M, M′; il s'agit de trouver la limite du point O. Les rayons vecteurs AM, AM′ étant, comme nous l'avons vu, également inclinés sur les normales correspondantes, les angles A et O sont égaux, et les quatre points A, M, M′, O sont sur un même cercle. Mais lorsque M′ tend vers M, ce cercle tend à devenir tangent à la spirale en M, puisque la sécante commune MM′ tend vers la tangente à la spirale; donc ce cercle à la limite a pour normale MO : son centre est donc sur MO; la limite C de O, ou le centre de courbure est donc l'extrémité du diamètre de ce cercle, dont M est l'autre extrémité. L'angle MAC est donc droit, et l'on a le centre de courbure en élevant en A une perpendiculaire au rayon vecteur, et cherchant sa rencontre avec la normale.

CHAPITRE XIX

DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

144. Si, sur chacune des normales à une courbe plane quelconque, on considère le centre de courbure correspondant, qui est la limite de la rencontre de cette normale avec une normale infiniment voisine, on obtiendra pour lieu de ces centres une courbe tangente à toutes les normales (n° 76). Cette courbe se nomme la *développée* de la première, et celle-ci s'appelle la *développante* de l'autre. Les développées jouissent d'une propriété remarquable, à laquelle elles doivent leur nom, et que nous allons faire connaître.

Soient M (*fig.* 61) un point quelconque d'une courbe, MO sa normale, O le centre de courbure, M′ un point de la courbe, distant de M d'une quantité infiniment petite du premier ordre, O′ le centre de courbure correspondant; les deux droites MO, M′O′ seront tangentes à la développée aux points O et O′. Or, comme la longueur MO du rayon de courbure dépend de la position de M, ou de la longueur de l'arc de la courbe donnée, compté à partir d'une origine quelconque sur la courbe, on peut regarder MO comme une fonction de l'arc; ainsi, d'après un principe posé précédemment, l'accroissement infiniment petit de MO, ou la différence M′O′ — MO, sera généralement de même ordre que MM′; et de même l'accroissement OO′ de l'arc de la développée sera de l'ordre MM′, puisque l'arc de la développée est aussi une fonction de celui de la proposée.

Maintenant il est facile de reconnaître que la longueur de l'arc OO′, et la différence des deux rayons de courbure MO, M′O′ ne peuvent différer que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles-mêmes.

En effet, élevons en M et O des perpendiculaires à MO, qui rencontrent la normale M′O′ en T et H. La partie TM′ est d'un ordre supérieur au premier, puisque MT est tangente et que la direction HT n'a pas pour limite celle de la tangente (n° 128). De plus, la longueur HT ayant MO pour projection sur la normale avec laquelle sa direction fait un angle infiniment petit du premier ordre, la différence entre OM et HT sera infiniment petite du second ordre. Donc la différence entre M′H et MO sera infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, puisqu'il en est ainsi de la partie TM′, dont nous n'avons pas cherché à préciser exactement l'ordre.

Il suit de là que la différence entre M′O′ et MO sera HO′, à une quantité près d'un ordre supérieur au premier. Or l'arc OO′ et la tangente O′H à la développée ont une différence du second ordre (n° 128) : donc enfin OO′ et M′O′ — MO ne peuvent avoir qu'une différence infiniment petite par rapport à elles-mêmes; et, par conséquent, si l'on considère la somme d'arcs infiniment petits OO′ formant un arc fini déterminé de la développée, cet arc sera égal à la limite de la somme des accroissements successifs des rayons de courbure. Et, comme cette somme d'accroissements n'est autre chose que l'accroissement total, ou la différence des rayons de courbures extrêmes, on arrive à cette conclusion : *Un arc fini de la développée d'une courbe quelconque est égal à la différence des deux rayons de courbure de cette courbe, correspondant aux deux extrémités de cet arc.* Et cette proposition, s'appliquant à toutes les grandeurs des arcs de la développée, s'applique évidemment aux arcs infiniment petits; d'où l'on voit que la différence entre OO′ et

M'O' — MO, que nous avions démontrée être d'un ordre supérieur au premier, était rigoureusement égale à zéro.

145. Il suit de ce qui précède que, si l'on suppose un fil flexible et inextensible appliqué sur la développée jusqu'à un certain point quelconque, à partir duquel il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'au point où il coupera la courbe proposée, qu'ensuite on développe la partie enroulée, en tenant toujours le fil tendu, et sans glissement sur la courbe, son extrémité sera toujours sur la courbe donnée; car l'accroissement de la partie rectiligne du fil tangent sera toujours égal à l'arc de la développée compris entre deux points de contact, ou à la différence des rayons de courbure correspondants; donc la partie rectiligne sera toujours la longueur même du rayon de courbure, et, par suite, l'extrémité sera toujours sur la courbe donnée. Le lieu des centres de courbure d'une courbe peut donc servir à décrire cette courbe par son développement en ligne droite, et c'est de là que lui vient le nom de *développée*.

146. *Développée de la cycloïde.* — Soient M un point quelconque de la cycloïde (*fig.* 62), MN la normale, NMD le cercle générateur, R le rayon de courbure; on a

$$R = 2MN;$$

on aura donc le centre de courbure O, relatif au point M, en prenant NO = MN. Mais si, au milieu I de la base, on élève la perpendiculaire IB égale au diamètre $2a$ du cercle générateur, et qu'on mène en B une parallèle BV à la base, le cercle décrit sur la perpendiculaire NC comme diamètre passera par O : l'arc NO sera donc égal à l'arc MN du cercle NMD, et, par suite, à la ligne AN. Donc OC = NI = BC. Donc le point O appartient à la cycloïde décrite par un point d'un cercle ayant $2a$ pour rayon, le point B pour origine, et BV pour base.

La développée de la cycloïde AEA′ se compose donc de deux demi-cycloïdes AB, A′B, identiques avec la première, et dont le prolongement se rapporterait aux branches suivantes de celles-ci.

147. La différence de deux rayons de courbure étant égale à l'arc de la développée, compris entre les deux points de contact, et le rayon de courbure de AEA′ étant nul au point A, la ligne MO est égale à l'arc AO. Donc dans toute cycloïde AOB, l'arc compris entre le sommet A et un point quelconque O est double de la corde NO du cercle générateur NOC qui passe en ce point; proposition déjà démontrée précédemment par d'autres considérations.

Ainsi, en revenant à la cycloïde primitive, on aurait

$$\mathrm{ME} = 2\mathrm{MD},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{AE} = 4a \quad \text{et} \quad \mathrm{AEA'} = 8a.$$

Si l'on fait $2a - y = y'$, c'est-à-dire si l'on compte les y' à partir de E, dans le sens EI, et que l'on pose $\mathrm{EM} = s$, on aura

$$s^2 = 8ay'.$$

Telle est l'équation de la cycloïde entre l'ordonnée et l'arc, comptés à partir de son sommet.

148. *Développée de la parabole.* — Soient l'équation $y^2 = 2px$ (*fig.* 63), M un point quelconque de la parabole, MN la normale, O le centre de courbure: on aura, d'après une formule donnée précédemment,

$$\mathrm{MO} = \frac{\overline{\mathrm{MN}}^3}{p^2}.$$

Soient x, y les coordonnées de M; α, β celles de O, et ρ

l'angle de MO avec la parallèle MI à l'axe des y; on aura

$$\mathrm{MN} = (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y - \beta = \mathrm{MO}\cos\varphi, \quad \alpha - x = \mathrm{MO}\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{y}, \quad \cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2+p^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}}.$$

On tire de là

$$y^3 = -p^2\beta, \quad \alpha = 3x + p.$$

Entre ces deux équations et celle de la parabole $y^2 = 2px$, si l'on élimine x et y, on aura l'équation du lieu des points O, ou de la développée. On trouve ainsi

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

On peut remarquer que l'équation précédente $\alpha = 3x + p$ indique une construction fort simple du centre de courbure O; car, l'abscisse OP de ce point étant égale à $3x + p$, on a $\mathrm{NP} = 2x$. Il suffit donc de mener la normale indéfinie MN, de prendre NP double de l'abscisse du point donné M, et d'élever en P une perpendiculaire à l'axe. Sa rencontre avec la normale donnera le centre de courbure.

149. *Développée de la spirale logarithmique.* — Nous avons trouvé que le centre de courbure C de cette courbe est le point de rencontre de la normale et de la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur (*fig.* 60). Le rapport de AC à AM étant constant, puisque les angles du triangle AMC sont constants, il s'ensuit que deux rayons vecteurs quelconques de la développée seront dans le même rapport que deux rayons vecteurs quelconques de la spirale, faisant entre eux le même angle que les deux autres. Si donc on fait tourner la développée autour de A, jusqu'à ce qu'un de ses points soit sur la spirale, toutes les autres y seront de même, et les deux courbes coïncideront. La développée de la spirale logarithmique n'est donc autre chose que cette spirale même qui a tourné d'un certain angle autour du pôle.

CHAPITRE XX.

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE SUR UN PLAN. — PROBLÈME DE LA ROULETTE : MÉTHODE DE DESCARTES POUR MENER LES TANGENTES AUX COURBES QU'ELLE DÉCRIT. — GÉNÉRALISATION DE CETTE QUESTION. — CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION.

150. Lorsque l'on considère sur un plan fixe une figure invariable qui se déplace d'une manière continue, suivant une loi arbitraire, un point quelconque appartenant à cette figure, ou lié invariablement à elle, décrit une courbe dépendante de cette loi, et dont les géomètres du XVIIe siècle ont étudié un cas particulier. Leurs recherches ont fait faire des progrès à la Géométrie, et le problème qui en a été l'occasion a conservé beaucoup de célébrité. Ils supposaient une courbe roulant sans glisser sur une autre supposée fixe, et ils se sont d'abord proposé de mener la tangente à la courbe décrite par un point lié à celle qui se déplace. Le premier cas qu'ils ont étudié est celui du roulement d'un cercle sur une droite; un point du cercle même décrit la courbe que nous avons nommée *cycloïde,* et qu'on a d'abord appelée *roulette*.

Nous ne nous proposons pas de faire connaître les différents procédés employés dans cette recherche; nous nous bornerons à la méthode donnée par Descartes, comme la plus simple et la plus générale.

Concevons d'abord, au lieu de deux courbes, deux polygones ayant leurs côtés respectivement égaux, dont l'un soit fixe et l'autre se meuve de manière que les côtés égaux s'ap-

pliquent successivement les uns sur les autres. Un point lié au polygone mobile décrira une suite d'arcs de cercle dont les centres seront les sommets successifs du polygone fixe, et, par conséquent, la normale à l'un quelconque de ces arcs passera par le sommet commun aux deux polygones. Si maintenant on suppose que les côtés des polygones diminuent indéfiniment, de manière que ces polygones tendent à se confondre avec les courbes données, cette propriété de la normale en un point quelconque subsistant toujours, quelle que soit la petitesse des côtés, elle aura encore lieu pour la courbe limite de l'ensemble des arcs de cercle, c'est-à-dire pour celle que décrit le point lié à la courbe mobile. Donc on aura la normale en un point quelconque de ce lieu, en le joignant au point de contact correspondant des deux courbes. La tangente sera la perpendiculaire à cette ligne.

Telle est la méthode de Descartes. Elle s'applique à des courbes quelconques.

Mais on risquerait de se tromper si on la suivait trop loin, par exemple pour la détermination de la courbure; et il faut y regarder de très-près pour reconnaître que ce qui suffit pour la tangente est insuffisant pour la courbure. C'est pourquoi nous allons reprendre la solution en mettant plus de rigueur dans les raisonnements.

151. Soient LL′ (*fig.* 64) la courbe fixe; SS′ la courbe mobile; M le point de contact pour une position quelconque de SS′; A la position correspondante du point lié à SS′, et qui décrit la courbe en question.

Prenons sur les deux courbes données deux arcs infiniment petits égaux MM′, MM_1; les points M′, M_1 seront coïncidents quand le point de contact des deux courbes sera M_1, puisque, d'après la définition du roulement sans glissement, les arcs qui séparent des points de contact corres-

pondants, pris sur les deux courbes, doivent être égaux. Pour amener le système mobile dans la position qu'il aura alors, on peut le faire mouvoir d'abord de manière que tous les points décrivent des droites égales et parallèles à $M'M_1$, ce qui amènera M' en M_1; puis, laissant le point M' fixe en M_1, faire tourner le système autour de ce point, de manière que la tangente en M' coïncide avec celle en M_1. Dans ce dernier mouvement toutes les droites s'inclineront, sur leur première direction, d'un angle égal à celui des tangentes en M' et M_1, c'est-à-dire de la somme ou de la différence des courbures des deux arcs MM', MM_1, suivant que ces courbures seront de sens contraire ou de même sens. Si donc nous menons AA' égal et parallèle à $M'M_1$, et que de M_1 comme centre, avec un rayon égal à $A'M_1$, qui n'est autre chose que AM', nous décrivions un arc de cercle $A'A_1$, tel que l'angle $A'M_1 A_1$ soit égal à celui des tangentes en M' et M_1, A_1 sera la position exacte de A, correspondant au contact en M_1 : AA_1 sera donc la sécante au lieu décrit par A, et la limite de sa direction sera la tangente cherchée.

Or les deux côtés MM', MM_1 du triangle rectiligne $MM'M_1$ ayant pour limite de leur rapport l'unité, et comprenant un angle infiniment petit, le troisième côté $M'M_1$ est infiniment petit par rapport aux deux autres. De plus, l'angle des tangentes en M', M_1 est généralement du premier ordre, même lorsque les courbures sont de même sens. Son égal $A'M_1 A_1$ sera donc du premier ordre, et il en sera de même de la droite $A'A_1$, puisque $A'M_1$ a une longueur finie. Donc dans le triangle $AA'A_1$, le côté AA' est infiniment petit par rapport à $A'A_1$; par conséquent, l'angle A_1 a pour limite zéro, et la direction de la sécante AA_1 a la même limite que celle de $A'A_1$. Mais cette dernière tend à faire un angle droit en A' avec la droite $A'M_1$ dont la position limite est AM; donc enfin la limite de la direction AA_1, ou la tangente cherchée, est perpendiculaire à AM.

Expression du rayon de courbure de la courbe décrite par un point lié à la courbe roulante.

152. Une courbe donnée U'V' (*fig.* 65) roulant sans glisser sur une courbe fixe UV, un point M lié à U'V' décrit une courbe, dont on demande le rayon de courbure en un quelconque de ses points.

Soient A le point de contact des deux courbes correspondant à une position quelconque M du point décrivant; O, O' les centres de courbure de ces courbes, qui se rapportent au point A. On sait que AM sera la normale à la courbe décrite par M; nous désignerons par n sa longueur AM, et par φ l'angle qu'elle fait avec la normale commune OO' aux deux courbes données.

Prenons sur ces courbes deux arcs infiniment petits égaux AN, AN'. Soit M' la position qu'aura prise M lorsque N' sera venu s'appliquer sur N; MN' viendra dans la position M'N; elle sera la normale en M': le point de rencontre X de M'N et MA sera, à la limite, le centre de courbure de la courbe en question, et MX sera, à la limite, le rayon de courbure, que nous désignerons par ρ.

Dans ce mouvement, qui amène N' en N, et, par suite, la tangente en N' sur la tangente en N, toutes les lignes du système se sont inclinées d'un angle égal à celui de ces deux tangentes, ou de leurs perpendiculaires N'O', NO. Cet angle est O + O', et peut être regardé comme ayant pour mesure

$$\frac{AN}{R} + \frac{AN'}{R'},$$

ou, à cause de AN = AN',

$$AN\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

La droite N'M étant venue, dans ce même mouvement,

coïncider avec M'NX, s'est inclinée d'un angle égal à N'MA + X.

Mais, en négligeant les infiniment petits sans influence sur le résultat, on peut prendre

$$N'MA = \frac{AN \cos\varphi}{AM}, \quad X = \frac{AN \cos\varphi}{AX}.$$

La somme de ces deux angles sera, en employant les notations précédentes,

$$AN \cos\varphi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right);$$

égalant ces deux expressions de la rotation du système, il vient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right) \cos\varphi;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \rho = \frac{n^2(R + R')}{n(R + R') - RR' \cos\varphi},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} - \frac{RR' \cos\varphi}{n^2(R + R')}.$$

Les formules (1) et (2) résolvent la question, et donnent le rayon de courbure du lieu de M, au moyen des rayons de courbure des deux courbes données, en leur point de contact A correspondant à M, et, en outre, de la position du point M_1 par rapport à A et à la normale à ces courbes.

Il n'est donc besoin de connaître aucune autre chose relativement aux courbes données, que leurs rayons de courbure au point que l'on considère. Ainsi l'on pourrait, en ce point, leur substituer deux autres courbes ayant même courbure qu'elles, et, par conséquent, leurs cercles de courbure eux-mêmes. Le lieu décrit par le point M ne serait plus le même, mais au point en question il aurait toujours même courbure.

Si la ligne UV est droite, on a

$$R = \infty, \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = \frac{n^2}{n - R' \cos\varphi},$$

ce qui est immédiatement applicable à la cycloïde et ramène au résultat déjà trouvé.

Si U′V′ est une ligne droite, UV étant une courbe quelconque, on a

$$R' = \infty,$$

et la formule (1) devient

$$\rho = \frac{n^2}{n - R \cos\varphi};$$

si de plus le point M était situé sur la droite mobile, on aurait

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = n.$$

Le centre de courbure serait donc au point de contact A; et, en effet, dans ce cas la courbe décrite ne serait autre chose qu'une développante de la courbe fixe.

Observation. — Si la courbe UV tournait sa convexité en sens contraire, il faudrait changer R en $-R$ dans les formules (1) et (2), pourvu toutefois que le centre de courbure X se trouvât toujours, comme on l'a supposé, sur le prolongement de MA.

Si au contraire le point X se trouvait du même côté que M, il faudrait changer ρ en $-\rho$ dans ces mêmes formules.

Application aux épicycloïdes.

153. Si l'on suppose que les courbes UV, U′V′ (*fig.* 66) soient des cercles, et que le point M appartienne au cercle mobile lui-même, la courbe décrite sera ce qu'on appelle une *épicycloïde* plane.

Voyons ce que donne alors la formule (1).

Le triangle AMB donnant

$$\cos\varphi = \frac{n}{2R'},$$

on aura

$$(3) \qquad \rho = \frac{2n(R+R')}{R+2R'} = n + \frac{nR}{R+2R'}.$$

Ainsi, pour avoir le centre de courbure, il suffit de prolonger la normale AM d'une quantité AX dont la valeur est

$$AX = \frac{nR}{R+2R'}.$$

Cette remarque donne un moyen bien simple de construire le centre de courbure X. Il suffit pour cela de tirer le diamètre MM_1, puis la droite M_1O : la rencontre de cette dernière avec MA donnera le point X.

En effet, la corde BM_1 étant parallèle à MA, on aura la proportion

$$AX : BM_1 :: AO : OB$$

ou

$$AX : n :: R : R + 2R',$$

ce qui démontre la proposition.

Si R est infini, la courbe devient une cycloïde, et l'on trouve $\rho = 2n$, comme on l'a vu précédemment.

Si $R = -2R'$, on trouve $\rho = \infty$ en chaque point, et l'épicycloïde se réduit à une ligne droite.

Si le point M, au lieu d'être sur la circonférence O', était à l'intérieur ou à l'extérieur, il décrirait ce que l'on appelle une épicycloïde allongée ou raccourcie, à laquelle on pourrait semblablement appliquer la formule (1).

Développées des épicycloïdes.

154. La développée de l'épicycloïde décrite par M est le

lieu des points X; et nous allons démontrer que c'est encore une épicycloïde.

Soit C la position primitive de M; on a alors $AM = o$, et le point X coïncide aussi avec C. Prenant ensuite l'arc CD égal à la demi-circonférence R', le point M est en m à sa distance maximum $R + 2R'$ du centre O; et le point X est à sa distance minimum Ox de ce même point.

Pour connaître cette dernière, il faut faire $n = 2R'$ dans la valeur de AX; ce qui donne

$$Dx = \frac{2RR'}{R + 2R'}, \quad Ox = \frac{R^2}{R + 2R'};$$

faisant

$$Ox = r, \quad Dx = 2r',$$

on aura donc

$$r = \frac{R^2}{R + 2R'}, \quad r' = \frac{RR'}{R + 2R'},$$

d'où

$$r : r' :: R : R'.$$

Cela posé, décrivons du centre o un cercle avec le rayon r, qui coupera OB en I; et sur AI comme diamètre, décrivons un cercle dont le rayon sera r'. Il est facile de voir que ce cercle passera par le point X; car MA, prolongé jusqu'à ce cercle tangent en A au cercle O', donnera une corde dont le rapport à MA sera celui des rayons $\frac{r'}{R'}$ ou $\frac{R}{R + 2R'}$.

Cette corde sera donc égale à $\frac{nR}{R + 2R'}$ ou à AX.

Maintenant les arcs AX et AM étant semblables seront dans le rapport des rayons r', R', ou, d'après ce qui précède, dans le rapport de $r : R$. Il en sera de même des suppléments de ces arcs, et l'on aura, par conséquent,

$$IX : AM_1 :: r : R.$$

Mais $AM_1 = AD$, puisque CD est égal à la demi-circonférence MAM_1.

On a donc

$$IX : AD :: r : R :: Ox : OD;$$

donc

$$IX = Ix :$$

d'où il résulte que le point X est constamment sur l'épicycloïde décrite par un point du cercle de rayon r' roulant sur le cercle de rayon r, ce point partant de x. Le point de rebroussement de cette épicycloïde correspondra donc au sommet m de la première, et le point de rebroussement C de la première au sommet c de la seconde.

On reconnaît facilement que les deux nouveaux cercles r, r' forment un système semblable à celui des cercles R, R', et qu'ainsi les deux épicycloïdes sont semblables. Ainsi la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable, et le rapport de similitude est $\frac{r}{R}$ ou $\frac{R}{R + 2R'}$.

De la double génération des épicycloïdes planes.

155. Toute épicycloïde peut être engendrée par deux cercles de rayons différents, roulant sur un même cercle.

1° Supposons le cercle roulant intérieur au cercle fixe O (*fig.* 67). Soient AB son rayon, B le point de contact dans une position quelconque, M le point décrivant dont la position primitive était I; on aura BM = BI. Par le point M, faisons passer un cercle de rayon OA tangent au cercle O. Il suffira pour cela de mener le rayon OB' parallèle à AM et de prendre OA' = AB = AM. Il en résultera

$$A'B = OA = AM.$$

Le cercle décrit du centre A' avec un rayon égal à OA passera donc par M et sera tangent en B' au cercle O.

Cela posé, il est facile de voir que les arcs B′M, B′I sont égaux.

En effet, puisque la figure OAMA′ est un parallélogramme, les angles B′A′M, MAM, BOB sont égaux.

Donc

$$\frac{B'M}{A'M} = \frac{BM}{AB} = \frac{BB'}{OB}.$$

Ajoutant les termes des deux premiers rapports égaux, on aura encore un rapport égal

$$\frac{B'M + BM}{OB},$$

d'où résulte

$$BB' = B'M + BM,$$

et, par suite,

$$B'M = B'I.$$

Donc le point M appartient à l'épicycloïde décrite par le cercle A′ roulant intérieurement sur le cercle O en sens contraire du cercle A.

Si donc M est un point lié invariablement aux deux cercles, le cercle A′ tournant dans O sans glisser fera rouler le cercle A de manière que les arcs IB, IB′, égaux respectivement à MB, MB′, soient entre eux comme les rayons AB, OA; et, par conséquent, les vitesses angulaires des centres A, A′ autour de O seront proportionnelles aux rayons de ces cercles.

2° Supposons maintenant que le cercle roulant A (*fig.* 68) soit extérieur au cercle fixe O.

Soient M le point du cercle A qui décrit l'épicycloïde, I sa position primitive sur le cercle O, B le point de contact des cercles A, O; les arcs MB, IB seront égaux.

Menons par O un rayon OB′ parallèle à AM; prenons OA′ = AM, et décrivons un cercle de A′ comme centre avec un rayon égal à A′B′, c'est-à-dire égal à la somme des rayons

des deux cercles donnés. Ce cercle sera tangent en B′ au cercle O; de plus, il passera par M, puisque la figure MAOA′ est un parallélogramme et que, par conséquent,

$$A'M = OA = A'B'.$$

Cela posé, les angles égaux A, A′, O, ayant des mesures égales, on aura

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BB'}{OB} = \frac{MB'}{A'B'},$$

et comme le dénominateur du dernier rapport est la somme de ceux des deux premiers, il s'ensuivra

$$MB' = MB + BB' = IB + BB'.$$

Donc le point M appartient à l'épicycloïde décrite par un point du cercle A′ qui roulerait sur le cercle O, du même côté que le cercle A.

On reconnaît facilement que les vitesses angulaires des centres A, A′ sont encore proportionnelles aux rayons.

Réciproquement, si A′ était le cercle roulant sur le cercle fixe O renfermé dans son intérieur, l'épicycloïde engendrée par un point de ce cercle pourrait être engendrée par un point du cercle extérieur A, ayant un rayon égal à la différence des deux autres, et roulant sur O du même côté que le cercle A′.

On peut tirer de là la conséquence générale que toute épicycloïde peut être engendrée par le roulement de deux cercles de rayons différents sur un même cercle. Les rayons de ces deux cercles ont une somme ou une différence égale au rayon du cercle fixe, et le point de contact de ces cercles générateurs avec le cercle fixe se déplace en sens contraire si ces deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre, et dans le même sens dans le cas contraire.

Comment tout déplacement continu, sur un plan, se ramène au roulement d'une courbe sur une autre.

156. Euler a démontré qu'une figure tracée sur la surface d'une sphère pouvait être amenée d'une position quelconque à une autre, sur cette même surface, par un seul mouvement de rotation autour d'un point de la sphère comme pôle.

Cette proposition, indépendante de la grandeur du rayon de la sphère, s'applique évidemment au plan, et d'ailleurs les mêmes raisonnements peuvent être faits directement dans ce cas particulier. On peut l'établir très-simplement de la manière suivante :

Soient A, A_1 (*fig.* 69) les deux positions successives d'un même point du système mobile; on amènerait A en A_1 en donnant à l'ensemble un mouvement de translation par lequel chaque point décrirait une droite égale et parallèle à AA_1. Il suffira donc, après cela, de laisser le point A fixe en A_1 et de faire tourner le système autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point arrive à la position qu'il doit occuper. Or ces deux mouvements successifs peuvent être exécutés au moyen d'une simple rotation autour d'un point fixe. En effet, menons VA_1U perpendiculaire à AA_1, et par A_1 deux droites faisant avec VU des angles égaux à la moitié de l'angle dont le système a dû tourner; inscrivons entre ces deux droites les lignes MM′, NN′ égales et parallèles à AA_1. Il est facile de voir qu'après les deux mouvements de translation et de rotation l'un des deux points M ou N, considéré comme lié au système, est revenu à sa première position. Car si la rotation porte de la direction A_1N vers A_1N', et, par conséquent, A_1M' vers A_1N', il est évident que le point M, parvenu en M′ après la translation, re-

viendra en M après une rotation représentée par l'angle $M'A_1M$. Et si la rotation était en sens inverse, le point N, amené par la translation en N', sera ramené en N par la rotation.

Il existe donc un point du système qui se trouve à la même place quand le système passe d'une position à l'autre, et, par conséquent, ce passage peut être effectué en faisant tourner le système autour de ce point. Il est facile de reconnaître que l'angle de cette rotation unique est le même que celui de la première. En effet, supposons que M soit le centre de la rotation finale; le point A venant en A_1, l'angle de rotation sera précisément AMA_1, qui est égal à MA_1M', puisque, AA_1 étant égal et parallèle à MM', il en résulte que AM est parallèle à A_1M.

157. Revenons maintenant au mouvement continu d'une figure sur un plan.

Considérons un nombre indéfiniment croissant de positions, infiniment voisines, du système entre deux quelconques de ses positions; on pourrait l'amener de chacune d'elles à la suivante par une simple rotation autour d'un point fixe. Les centres successifs sont distants les uns des autres de quantités d'autant plus petites, que les positions sont plus voisines; et en les joignant par des droites on forme un polygone déterminé. On peut maintenant considérer les points liés au système mobile, qui viennent successivement coïncider avec les sommets de ce polygone; ils formeront un autre polygone déterminé, mobile avec le système, et ayant ses côtés successifs respectivement égaux à ceux du polygone fixe sur lesquels ils viendront successivement s'appliquer. On peut donc faire passer le système par toutes les positions intermédiaires que l'on a choisies, en faisant rouler un polygone lié avec lui, sur un autre polygone fixe. Concevons maintenant que ces positions se mul-

tiplient indéfiniment, on se rapproche de plus en plus du mouvement continu en question; ces deux polygones tendent vers des courbes déterminées, et par conséquent le mouvement donné, quel qu'il soit, peut être opéré en liant une certaine courbe au système mobile, en en construisant une autre qui reste fixe, et faisant rouler la première sur la seconde sans glisser, puisque les parties de polygone qui s'enroulent l'une sur l'autre sont constamment égales. Telle est la manière la plus simple de se représenter le mouvement continu d'un système sur un plan; elle rentre dans le mouvement de roulette que les géomètres avaient d'abord considérée.

158. Les centres des rotations très-petites, ou les différents sommets du polygone fixe, tendent vers des points limites qui sont ceux de la courbe fixe, et que l'on nomme *centres instantanés de rotation;* et l'on dit, en employant le langage infinitésimal, que tout mouvement peut être considéré comme composé d'une infinité de mouvements de rotation autour de ces centres instantanés. Mais il faut toujours entendre par ce langage, que nous avons tant de fois expliqué, que ce mouvement est la limite d'une suite de mouvements de rotation dont le nombre croît indéfiniment, et qui s'exécutent successivement autour de points qui se rapprochent indéfiniment des centres instantanés.

Moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un point quelconque du système, quand on connaît les tangentes aux trajectoires de deux points.

159. M. Chasles a déduit de ces considérations un moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un quelconque des points du système, c'est-à-dire à la courbe qu'il décrit, quand on sait mener les tangentes aux trajectoires de deux de ses points. Il l'a même étendue à d'autres cas, comme

nous le verrons tout à l'heure. En effet, nous avons vu que, pour avoir la normale en un point quelconque d'une de ces courbes, il suffisait de joindre ce point au point de contact de la courbe roulante avec la courbe fixe, c'est-à-dire au centre instantané de rotation. Si donc on peut mener les tangentes aux trajectoires de deux points du système, aux points correspondant à une position quelconque de ce système, la rencontre des normales en ces points fera connaître le centre instantané; et en le joignant à un point quelconque du système dans cette même position, on aura la normale à la trajectoire de ce point : la tangente s'ensuit.

Exemple. — Supposons qu'une droite de longueur constante se meuve de manière que ses extrémités restent sur deux droites données; un quelconque de ses points décrira une ellipse dont la normale s'obtiendra en joignant ce point au point de rencontre des perpendiculaires aux deux droites menées par les extrémités de la droite mobile dans la position correspondant au point que l'on considère.

Si, au lieu des deux droites fixes, on avait deux courbes auxquelles on saurait mener les tangentes, il n'y aurait pas plus de difficulté. Dans le cas où ces courbes sont des cercles, la courbe décrite par un point de la droite inscrite est d'un grand usage dans les applications aux machines.

160. *Extension de cette règle au cas où une droite du système est tangente à une courbe fixe, ou passe par un point fixe.*

Cette règle peut être étendue au cas où une droite du système se mouvrait tangentiellement à une courbe fixe donnée; cette condition peut remplacer la connaissance de la trajectoire d'un point.

Il est inutile de parler du cas où la droite roulerait sans glisser sur la courbe, parce que le centre instantané ne se-

rait autre chose que son point de contact avec cette courbe; il serait donc connu et le problème serait résolu. Il suffit donc de considérer le cas où les longueurs qui s'enroulent l'une sur l'autre sont inégales, et où, par conséquent, leurs parties infiniment petites correspondantes n'ont pas pour limite de leur rapport l'unité; de sorte que, ces parties étant du premier ordre, leur différence en est aussi. Soient UV, U'V' (*fig.* 70) deux positions, infiniment voisines, de la droite du système qui reste tangente à la courbe fixe SS'; M, M' les points de contact correspondant à ces deux positions. Lorsque UV se déplace, celui de ses points qui était en M décrit une trajectoire tangente en M à la courbe SS'. En effet, soit M_1 sa position sur U'V'; la différence entre $M'M_1$ et l'arc MM' est par hypothèse du même ordre que MM'; mais puisque l'angle des tangentes, ainsi que $M'M_1$ sont des infiniment petits du même ordre que MM', ou du premier ordre, la distance MM_1 est aussi du premier, et la perpendiculaire abaissée de M_1 sur MV est du second; donc l'angle M_1MV a pour limite zéro; c'est-à-dire que la tangente en M à la courbe que décrit ce point lié à la droite UV coïncide avec UV.

Il suit de là que, dans une quelconque des positions de UV, son point de contact M peut être considéré comme se mouvant sur une courbe fixe tangente en M à UV. Donc on aura le centre instantané de rotation, en élevant en M une perpendiculaire à UV, et cherchant son point de rencontre avec la normale à la trajectoire connue d'un autre point du système.

Mais si, au lieu de cette trajectoire d'un autre point, on connaissait une seconde courbe à laquelle une seconde droite du système serait tangente, on se retrouverait dans le même cas que tout à l'heure; et en élevant une perpendiculaire à cette seconde droite en son point de contact, on aurait une nouvelle droite renfermant le centre instantané

de rotation, qui se trouverait ainsi déterminé; d'où résulteraient, comme nous l'avons vu, les tangentes aux trajectoires des autres points.

161. Si la courbe à laquelle la droite du système est tangente se réduisait à un point, c'est-à-dire si elle était assujettie à passer par un point fixe, il suit de ce qui précède que, en élevant en ce point une perpendiculaire à la droite, on aurait une ligne passant par le centre instantané. D'ailleurs la démonstration directe en est encore plus facile.

Car soient A (*fig.* 71) le point fixe, UV, U′V′ deux positions infiniment voisines de la droite, M′ la position où est venu le point M de UV, situé d'abord en A; MM′ sera une sécante du lieu décrit par ce point: à mesure que U′V′ s'approcherait de reprendre la position UV, le point M′ tendrait vers M et la sécante MM′, ou U′V′, vers UV; cette dernière direction est donc celle de la tangente au lieu décrit par le point M de UV. Donc on aura encore une ligne contenant le centre instantané de rotation, en menant par M, c'est-à-dire par A, une perpendiculaire à UV.

Application de ces différents procédés.

162. 1° *Conchoïde.* — La droite AN (*fig.* 36) passant par le point fixe A, et son point M décrivant la droite XY, on aura la normale à la courbe décrite par un de ses points N, en élevant en A une perpendiculaire à AN, et en M une perpendiculaire à XY, puis joignant N à leur point de concours O.

On reconnaîtrait facilement que cette solution plus simple rentre dans celle que nous avions trouvée par une autre voie.

2° *Cyssoïde.* — Nous considérerons le mode suivant de génération de cette courbe.

On donne deux droites rectangulaires AC, CZ (*fig.* 27); on prend deux longueurs égales CB, BA, et l'on fait mouvoir un angle droit AVU, de manière que VU = AC, que le point U se meuve sur CZ, et que le côté VA passe toujours par le point fixe A : le milieu M de UV décrira une cyssoïde commençant en B et ayant pour asymptote la parallèle à CZ à une distance CB′ = CB.

Cela posé, pour mener la tangente en M, il suffira d'élever en U une perpendiculaire à la droite CZ, sur laquelle se meut le point U de la figure mobile, et en A une perpendiculaire à AV; le point de rencontre de ces droites sera le centre instantané, et, en le joignant en M, on aura la normale à la cyssoïde.

3° *Angle droit dont les côtés sont tangents à une ellipse.* — Il suffira de mener des perpendiculaires aux côtés de l'angle, en chacun des points de contact, et de joindre leur point de rencontre au sommet de l'angle mobile; on aura ainsi la normale au lieu décrit par ce sommet. Cette normale sera la seconde diagonale d'un rectangle dont l'autre sera la corde de contact; elle passera donc par le milieu de cette corde et, par suite, par le centre. On voit donc que toutes les normales au lieu en question passent par le centre de l'ellipse; donc ce lieu est un cercle concentrique à l'ellipse. On aura son rayon en prenant les côtés de l'angle parallèles aux axes; on trouvera ainsi $\sqrt{a^2 + b^2}$, en désignant les demi-axes par a, b.

Les mêmes raisonnements s'appliquent immédiatement à l'hyperbole, mais le problème n'est pas toujours possible. Dans le cas de la parabole, toutes les normales au lieu seront parallèles à l'axe; par conséquent, ce lieu sera une droite perpendiculaire à l'axe : et l'on reconnaît facilement que c'est la directrice.

CHAPITRE XXI.

DES COURBES ENVELOPPÉS.

163. Considérons une courbe dont l'équation renferme une constante, ou paramètre, à laquelle on donne une série de valeurs, variant d'une manière continue. Pour chacune de ces valeurs, on aura une courbe déterminée. Ces courbes changeront de forme et de position ; et, si leurs points laissaient une trace sur le plan, il arriverait généralement qu'il y aurait une partie du plan sur laquelle ces traces seraient imprimées, et une autre partie où il n'en existerait pas. La séparation de ces deux parties sera une ligne avec laquelle les courbes variables auront un point commun, mais qu'elles ne pourront couper, puisqu'alors elles pénétreraient dans la région où cependant elles n'ont aucun point, par l'hypothèse même. Cette ligne de séparation est donc tangente à toutes ces courbes, et on la nomme leur *enveloppe*.

Nous avons déjà traité un cas particulier de cette question générale, celui où la ligne mobile est droite ; et nous avons démontré que si, pour chacune des positions de cette droite, on cherchait la limite de sa rencontre avec la droite infiniment voisine, on obtenait un point d'une courbe à laquelle ces droites sont constamment tangentes.

Il s'agit maintenant de généraliser ces considérations. Pour cela, considérons une quelconque des courbes en question et deux autres infiniment voisines, l'une précédant, l'autre suivant la première ; et supposons que celle-ci soit coupée par chacune des deux autres, ce qui peut très-bien

ne pas arriver. Joignons ces deux points de rencontre infiniment voisins par une droite : ce sera une sécante à la courbe, d'autant plus voisine de la tangente que les courbes seront plus rapprochées.

En agissant de la même manière pour toutes les courbes infiniment voisines, dans toute l'étendue des valeurs du paramètre pour lesquelles les courbes infiniment voisines se coupent, on construira un polygone à côtés infiniment petits et auquel les courbes variables tendront de plus en plus à être tangentes, à mesure que l'on considérera un plus grand nombre de courbes intermédiaires. De sorte que la limite vers laquelle tend le lieu de ces points de rencontre est une courbe tangente à toutes les proposées ; et, sur chacune de celles-ci, on aura le point appartenant à l'enveloppe, en cherchant la limite de son point de rencontre avec une autre qui s'en rapproche indéfiniment. Le problème est donc ramené à la recherche de la limite d'un point, après quoi il rentrera dans les questions ordinaires de lieux géométriques. Le calcul de cette limite peut être indiqué d'une manière générale.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0$$

l'équation d'une quelconque des courbes, a désignant le paramètre variable. Une courbe infiniment voisine correspondra à un accroissement infiniment petit h de a, et aura pour équation

$$(2) \qquad F(x, y, a + h) = 0.$$

Les valeurs de x et y, tirées de ces deux équations, tendront vers les coordonnées du point limite à mesure que l'on y fera tendre h vers zéro. C'est ce que l'on pourra effectuer dans chaque cas particulier ; mais il est possible de ramener ce calcul à une considération générale.

Remarquons d'abord que, puisque nous désignons par le même signe F les fonctions qui expriment les deux membres de ces équations, nous supposons que ces fonctions ont une forme unique, que, par exemple, il ne s'y trouve pas de radicaux affectés de double signe ; car il faudrait alors s'assurer si, pour le point de rencontre, les signes doivent être pris de la même manière, sans quoi la fonction ne serait pas la même dans les deux équations. Pour éviter ces difficultés, nous admettrons que la forme de l'équation donnée a été modifiée, s'il l'a fallu, de manière à devenir unique.

Retranchant les équations (1), (2), on aura une équation qu'on pourra substituer à (2) sans changer les solutions communes ; on peut encore diviser par h, et les coordonnées du point de rencontre des deux courbes infiniment voisines seront données par l'équation (1) et la suivante :

$$(3) \qquad \frac{F(x, y, a+h) - F(x, y, a)}{h} = 0.$$

On aura donc les coordonnées du point limite en cherchant les solutions communes à l'équation (1) et à celle dont le premier membre serait la limite vers laquelle tend celui de l'équation (3) lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée de $F(x, y, a)$ par rapport à a.

Ainsi, pour chaque position de la courbe mobile, le point de la courbe enveloppe sera déterminé par les équations

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'(a) = 0,$$

et si l'on veut le lieu de ces points, il suffit d'éliminer a entre ces deux équations.

Remarquons que si, dans une de ces positions, la courbe n'est pas coupée par les voisines, cela annoncera qu'elle n'aura aucun point commun avec l'enveloppe. Dans ce cas,

cette dernière courbe ne sera tangente qu'aux courbes correspondant aux valeurs de a comprises entre certaines limites, comme nous en citerons des exemples.

164. *Applications.* — 1° Soient deux droites parallèles BU, B'U' (*fig.* 73) coupées par une troisième BB', et une droite MM' qui se meut de manière que l'on ait toujours

$$\mathrm{BM}.\mathrm{B'M'} = m^2;$$

trouver l'enveloppe de ces droites. Prenons pour origine le milieu A de BB', pour axes la droite ABX et une parallèle à BM, et faisons $\mathrm{BB'} = 2a$.

En prenant pour équation de M'M

$$y = \alpha x + \beta,$$

on devra avoir, entre α, β, la condition

$$\beta^2 - a^2\alpha^2 = m^2,$$

d'où

$$\beta = \pm\sqrt{a^2\alpha^2 + m^2},$$

et l'équation de la droite sera

$$y = ax \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + m^2}.$$

Pour faire disparaître la double forme, on l'écrira ainsi

$$(y - ax)^2 = a^2\alpha^2 + m^2,$$

ou

$$y^2 - 2\alpha xy + \alpha^2(x^2 - a^2) - m^2 = 0.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à α, il vient

$$-xy + \alpha(x^2 - a^2) = 0;$$

en éliminant α entre cette équation et la précédente, on aura pour équation de l'enveloppe

$$a^2y^2 + m^2x^2 = m^2a^2,$$

On peut remarquer que si l'équation de la droite avait été résolue par rapport à α, ce qui aurait donné un double signe, le calcul devenait illusoire, et l'on se trouvait dans le cas dont il a été parlé en général.

2° Supposons maintenant un cercle variable ayant pour équation

$$(1) \qquad y^2 + (x - a)^2 = ma,$$

a étant le paramètre variable.

Faisant passer tous les termes dans le premier membre, et prenant la dérivée par rapport à a, ou encore prenant les dérivées des deux membres par rapport à a, on trouve

$$(2) \qquad -2x + 2a - m = 0.$$

Éliminant a entre (1) et (2), on a pour équation de l'enveloppe

$$y^2 = mx + \frac{m^2}{4},$$

parabole qui a pour axe la droite sur laquelle se meut le centre du cercle. Son sommet C (*fig.* 74) est à une distance $AC = \frac{m}{4}$, et les points B, B′ où elle coupe l'axe des y ont pour ordonnées $\pm \frac{m}{2}$.

Cette question offre un exemple du cas où toutes les courbes mobiles ne sont pas touchées par l'enveloppe. En effet, les équations (1), (2) donnent pour coordonnées du point limite de l'intersection des deux cercles

$$x = a - \frac{m}{2}, \quad y = \pm\sqrt{m\left(a - \frac{m}{4}\right)}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de a moindres que $\frac{m}{4}$, les cercles successifs ne se coupent pas; ils sont intérieurs l'un

à l'autre. Pour $a = \frac{m}{4}$, on a

$$y = 0, \quad x = -\frac{m}{4};$$

ce qui donne le point C. Les valeurs plus grandes de a, jusqu'à l'infini, donneront tous les points de la parabole.

Caustiques.

165. Lorsque des rayons de lumière ou de chaleur, émanés d'un même point dans toutes les directions situées dans un même plan, sont réfléchis à leur point de rencontre avec une courbe située dans ce plan, de manière que les angles des rayons incidents et réfléchis avec la normale à cette courbe soient égaux, l'enveloppe des rayons réfléchis se nomme *caustique par réflexion,* relativement à cette courbe et au foyer de chaleur ou de lumière.

Si les rayons étaient réfractés au point où ils rencontrent la courbe, l'enveloppe se nommerait *caustique par réfraction.* Ces courbes ont dans la Physique une utilité dont nous ne parlerons pas ici. Pour les obtenir, on cherchera, sur un rayon réfléchi ou réfracté quelconque, la limite de son point de rencontre avec un rayon infiniment voisin, puis le lieu des points ainsi trouvés. Ce point limite peut être trouvé par le calcul, en cherchant l'équation générale des rayons réfléchis ou réfractés; on peut aussi le trouver souvent plus simplement par des considérations géométriques : nous allons en donner quelques exemples, en nous bornant aux caustiques par réflexion.

Considérons d'abord généralement la question pour une courbe quelconque.

Supposons qu'un rayon de lumière parte d'un point donné A (*fig.* 75) et se réfléchisse en B sur une courbe donnée, en faisant avec la normale BV un angle VBX = ABV.

Considérons un autre rayon infiniment voisin, partant de A et se réfléchissant en M sur la courbe. Ce rayon réfléchi rencontre le premier en X.

Cela posé, on demande la limite A_1 du point X, lorsque M se rapproche indéfiniment de B.

On suppose connue, d'après la nature de la courbe, la limite m du rapport de l'angle O des deux normales à l'angle A correspondant.

Les deux triangles MHX, BHO, ayant un angle égal H, donneront, en désignant par α, α' les deux angles d'incidence successifs,

$$X - O = OBH - HMX = \alpha - \alpha';$$

les deux triangles BAK, MOK donneront de même

$$O - A = \alpha - \alpha',$$

d'où

$$X - O = O - A \quad \text{ou} \quad X + A = 2O.$$

On aura maintenant les deux proportions suivantes :

$$MX : MI :: \sin I : \sin X, \quad BA : BI :: \sin I : \sin A,$$

d'où

$$\frac{MX}{BA} : \frac{MI}{BI} :: 1 : \frac{\sin X}{\sin A}.$$

Or on reconnaît facilement que la limite du rapport $\frac{MI}{BI}$ est l'unité, parce que, dans le triangle BIM, les deux angles B et M ont une même limite finie. Donc

$$\lim \frac{MX}{BA} = \lim \frac{\sin A}{\sin X} = \lim \frac{A}{X} = \lim \frac{A}{2O - A} = \frac{1}{2m - 1}.$$

Donc enfin, en observant que MX et BX ont même limite A_1B, on aura

$$A_1B = \frac{AB}{2m - 1}.$$

La limite m peut s'exprimer au moyen du rayon de courbure R et de l'angle d'incidence α. En effet, on peut prendre

$$O = \frac{BM}{R},$$

et

$$A = \frac{BH_1}{AB} = \frac{BM \cos\alpha}{AB};$$

donc

$$\lim \frac{O}{A} = m = \frac{AB}{R\cos\alpha} \quad \text{et} \quad A_1 B = \frac{AB.R\cos\alpha}{2AB - R\cos\alpha},$$

d'où

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{A_1 B} = \frac{2}{R\cos\alpha};$$

si $AB = \infty$,

$$A_1 B = \frac{R\cos\alpha}{2}.$$

Applications.

166. 1° *Cercle.* — Un faisceau de rayons parallèles situés dans le plan d'un cercle O (*fig.* 76) est réfléchi par la circonférence de ce cercle; on demande la limite du point X où le rayon PM, après s'être réfléchi suivant MV, est rencontré par le rayon réfléchi infiniment voisin NX.

Cette question rentre dans la précédente, en supposant $A = 0$.

On aura donc d'abord

$$X = 2O;$$

le triangle MNX donnera ensuite

$$\frac{NX}{\sin NMX} = \frac{MN}{\sin X}.$$

Passant à la limite, et observant que NX a même limite que MX, et que l'angle NMX a pour limite le complément

de α, le premier membre deviendra

$$\frac{\lim MX}{\cos\alpha}.$$

Quant au second membre, on pourra, sans changer sa limite, remplacer la corde MN par l'arc qui est le produit du rayon du cercle par l'angle O; remplaçant ensuite X par 2O, et substituant l'angle infiniment petit à son sinus, on trouvera $\frac{MO}{2}$ pour limite du second membre.

On conclut de là

$$\lim MX = \frac{MO\cos\alpha}{2} = \frac{MP}{2}.$$

Cherchons maintenant le lieu des points X, c'est-à-dire la caustique.

Soient CC′ (*fig.* 77) le diamètre parallèle aux rayons, et H′PH un rayon incident quelconque; on aura le rayon réfléchi en faisant l'angle $OHH_1 = OHH'$.

On a vu précédemment que le point M de la caustique s'obtenait en prenant

$$HM = HI = \frac{HP}{2}.$$

Soit N le milieu de HO, la ligne NI sera parallèle à PO; donc l'angle I et, par suite, l'angle M seront droits; et, par conséquent, le cercle décrit sur HN comme diamètre passera par I et M. Les deux angles MHN, AON seront égaux entre eux, comme étant l'un et l'autre égaux à IHN.

Or, si l'on décrit du centre O avec un rayon $OA = \frac{OC}{2}$ un cercle qui sera tangent au cercle HMN, l'angle au centre AON aura pour mesure $\frac{AN}{AO}$, et l'angle MHN inscrit dans

le cercle dont le diamètre est égal à AN aura pour mesure $\frac{MN}{AO}$.

On aura donc égalité entre les arcs MN, AN, puisque les deux angles sont égaux.

D'où il résulte que le point M de la caustique appartient à l'épicycloïde décrite à partir de l'origine A par un cercle dont le rayon est le quart de celui du cercle donné, roulant sur un cercle concentrique au cercle donné, et d'un rayon moitié moindre.

2° *Caustique par réflexion d'une spirale logarithmique, en supposant le point lumineux au pôle.*

Soient M, M′ (*fig.* 78) deux points infiniment voisins pris sur la spirale; MO, M′O les normales; AM, AM′ deux rayons incidents, et MX, M′X ces mêmes rayons après la réflexion.

Il faut d'abord trouver la limite du point X quand M′ tend vers M.

Les angles des rayons vecteurs avec la normale étant constants, d'après la nature de la courbe, et l'angle de réflexion étant égal à celui d'incidence, on reconnaît immédiatement que les trois angles A, O, X sont égaux.

Donc les cinq points M′, M, A, O, X sont sur un même cercle. La limite de ce cercle est celui qui passerait par les deux points A, M, et aurait en M la même tangente que la courbe. Traçant donc ce cercle, le point I, où il coupera le rayon réfléchi, sera un point de la caustique.

Si l'on veut connaître le lieu des points I, il suffira de remarquer que le triangle AMI est isoscèle, puisque les cordes MA, MI, symétriques par rapport au diamètre MO′, sont égales, et que l'angle AMI est constant; donc le rapport de AI à AM est constant, ainsi que l'angle IAM.

Donc les points I appartiennent à une spirale identique à la proposée, et que l'on fera coïncider avec elle en la fai-

sant tourner autour du pôle, jusqu'à ce qu'un quelconque de ses points vienne s'appliquer sur la spirale donnée.

De l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre.

167. Soient HMK (*fig.* 79) la courbe enveloppée, M le point où elle touche l'enveloppe UV; H'M'K' la première courbe dans une position infiniment voisine, M' le point où elle touche l'enveloppe. Les points de contact de la courbe mobile et de UV se déplacent d'une manière continue sur cette courbe mobile; de sorte que le point M de HK est situé sur H'K' à une distance infiniment petite de M'. Ce point est donc à une distance infiniment petite du second ordre de UV, puisque la courbe H'K' est tangente à UV en M'.

D'où il résulte que le lieu décrit par le point M de la courbe mobile est tangent en M à UV, et par conséquent à HK.

Ce qui donne le théorème suivant :

Les points où une courbe mobile invariable touche son enveloppe, dans une quelconque de ses positions, sont ceux qui décrivent des trajectoires tangentes à la courbe mobile dans la position que l'on considère.

Or la trajectoire d'un point lié à la courbe roulante a sa tangente perpendiculaire à la droite qui joint le point que l'on considère au centre instantané de rotation, et ce centre est le point de contact de la courbe roulante avec la courbe fixe.

Donc, enfin, pour une position quelconque de la courbe mobile, on aura les points où elle touche l'enveloppe, en abaissant du point de contact de la courbe roulante toutes les normales possibles sur la courbe mobile.

Exemple. — Un cercle dont le centre est O' (*fig.* 80)

roule sur un cercle fixe dont le centre est O; trouver l'enveloppe d'un diamètre déterminé du premier.

Soient CC′ une position quelconque du diamètre en question, et B le point du cercle O, avec lequel le point C a coïncidé; les arcs AB et AC seront égaux.

Pour avoir le point de CC′ qui appartient à son enveloppe, il faut abaisser du point de contact A des deux cercles une perpendiculaire AI sur CC′ : I sera le point cherché.

Or, si l'on décrit un cercle sur AO′ comme diamètre, il passera par I, et l'angle AOI considéré successivement comme inscrit dans ce cercle, et comme ayant son sommet au centre du cercle roulant, aura pour mesure

$$\frac{\text{arc AI}}{\text{AO}'} \quad \text{et} \quad \frac{\text{arc AC}}{\text{AO}'}.$$

Donc l'arc AI est égal à AC et par suite à AB. Le point I appartient donc à l'épicycloïde décrite par le cercle de diamètre AO′, roulant sur le cercle fixe. Cette épicycloïde est donc l'enveloppe cherchée.

Autre exemple. — Considérons maintenant l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux courbes données; on aura le point appartenant à l'enveloppe en menant d'abord les normales aux deux courbes aux extrémités de la droite : leur point de rencontre sera le centre instantané, et il suffira d'abaisser de ce point une perpendiculaire sur la droite inscrite pour avoir le point de la courbe enveloppe.

En appliquant cette construction au cas où les deux courbes se réduisent à des droites perpendiculaires, on retombe sur un résultat précédemment obtenu.

Rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre.

168. Soient la courbe U'V' (*fig.* 81) roulant sur UV, HK la courbe liée à U'V', et H'K' son enveloppe. Soient A le point de contact de UV, U'V' dans une position quelconque; O, O' les centres de courbure de ces deux lignes; R, R' leurs rayons de courbure; n la longueur de la normale AM abaissée de A sur HK; φ l'angle qu'elle fait avec la normale commune OA'O.

D'après ce qui précède, le point M appartient à l'enveloppe de HK. Pour avoir un point de cette même courbe infiniment voisin de M, prenons sur UV, U'V' deux arcs égaux infiniment petits AN, AN', que nous désignerons par ω, et abaissons de N' une normale N'B' sur HK. Lorsque, dans le roulement de U'V', N' sera venu coïncider avec N, le point B' de HK sera devenu le point de l'enveloppe, puisque N'B' sera alors la normale abaissée sur HK du point de contact N des deux courbes UV, U'V'. Soit B la position que B' aura prise ainsi, BN sera la normale commune à l'enveloppée et à H'K'; le point X, où elle rencontre la normale infiniment voisine, a pour limite le centre de courbure de l'enveloppe, et nous le considérons dans nos calculs comme étant ce point même.

De même nous considérerons le point de rencontre I des deux normales à HK aux points infiniment voisins M, B', comme étant le centre de courbure de HK, et nous ferons

$$MI = \rho', \quad MX = \rho.$$

Cela posé, lorsque le point N sera devenu le point de contact, le système mobile aura tourné d'une quantité angulaire égale à l'angle que faisaient les deux tangentes en N, N', lorsque A était le point de contact. Cet angle, qui

est le même que celui des normales NO, N'O', est égal à la somme des angles, O, O' ou à $\frac{\omega}{R} + \frac{\omega}{R'}$.

Mais, d'une autre part, la ligne N'B'I étant venue coïncider avec BNX, la quantité dont le système a tourné doit être égale à la somme des angles I, X; d'où il résulte

$$O + O' = I + X.$$

Pour évaluer les angles I, X, on abaissera de A des perpendiculaires sur IN' et BX; elles auront pour valeur $\omega \cos\varphi$, et l'on aura, par conséquent,

$$I = \frac{\omega \cos\varphi}{n + \rho'}, \quad X = \frac{\omega \cos\varphi}{\rho - n};$$

d'où résultera l'équation

$$\frac{\omega}{R} + \frac{\omega}{R'} = \frac{\omega \cos\varphi}{n + \rho'} + \frac{\omega \cos\varphi}{\rho - n},$$

ou

$$(4) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi \left(\frac{1}{n + \rho'} + \frac{1}{\rho - n}\right),$$

ce qui détermine ρ au moyen de R, R', ρ', n, φ.

On voit donc que le rayon de courbure en un point quelconque de l'enveloppe ne dépend que des rayons de courbure des trois courbes UV, U'V', HK, et non de ces courbes mêmes; de sorte que, pour cette détermination, on pourrait les remplacer par leurs cercles osculateurs, correspondant à la position quelconque que l'on considère.

169. On retomberait dans le cas primitivement examiné si l'on supposait que le rayon de courbure ρ' fût constamment nul, parce que la courbe HK se réduirait alors à un point. On voit, en effet, que l'équation (4) coïncide avec l'équa-

tion (1) lorsque l'on fait $\rho' = 0$. La première question n'est donc qu'un cas particulier de la seconde, et l'équation générale (4) renferme la solution de l'une et de l'autre; on pourra donc se borner à conserver cette dernière formule.

Exemple. — Appliquons la formule (4) au cas déjà examiné, où les courbes UV, U'V' sont des cercles, et HK un diamètre de ce dernier.

Il faut alors supposer R, R' constants et $\rho' = \infty$, ce qui réduit d'abord la formule (3) à la suivante

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\cos\varphi}{\rho - n};$$

d'où

$$\rho = n + \frac{\cos\varphi}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}.$$

Exprimant $\cos\varphi$ au moyen de n, d'après la relation évidente $n = R'\cos\varphi$, il vient

$$\rho = \frac{n(2R + R')}{R + R'}.$$

En comparant cette valeur à la formule générale (3) relative aux épicycloïdes, on reconnaît, comme cela devait être, que ρ est le rayon de courbure d'une épicycloïde décrite par un point d'un cercle de rayon $\frac{R'}{2}$ roulant sur un cercle de rayon R.

Mesure du glissement de la courbe mobile sur son enveloppe.

170. Si l'arc MB pouvait être égal à MB', la courbe HK roulerait sans glisser sur H'K'. Cela n'est pas possible, parce que le système mobile devrait alors tourner autour du point de contact M supposé immobile, ce qui ne peut être, puisque le point A l'est lui-même. Car les vitesses

de tous les points seraient nulles, si celles de deux points l'étaient; et si toutes les vitesses étaient nulles à chaque instant, le système serait constamment dans la même position.

Nous allons d'ailleurs reconnaître que le calcul donne des valeurs essentiellement différentes pour MB et MB'. En effet, on a

$$MB = \rho X = \frac{\rho\omega\cos\varphi}{\rho - n}, \quad MB' = \rho' I = \frac{\rho'\omega\cos\varphi}{\rho' + n};$$

donc

$$MB - MB' = \omega\cos\varphi\left(\frac{\rho}{\rho - n} - \frac{\rho'}{\rho' + n}\right) = n\omega\cos\varphi\,\frac{\rho + \rho'}{(\rho - n)(\rho' + n)},$$

et, en vertu de l'équation (4),

$$MB - MB' = n\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = n(O + O').$$

C'est ainsi que M. Savary, après avoir établi la formule (4) dans ses feuilles sur les engrenages, a donné le calcul de l'arc de glissement dont la considération est indispensable dans la théorie des machines.

171. Mais nous allons montrer comment il est possible de calculer cet arc de glissement sans introduire les rayons de courbure des deux courbes qui glissent l'une sur l'autre, et, par conséquent, sans avoir besoin de connaître la formule (4).

En effet, avant de calculer cette formule, nous avons fait voir que si l'on prenait deux arcs infiniment petits égaux AN, AN' sur UN, U'V'; que de N' on abaissât une normale N'B' sur HK, et de N une normale NB sur H'K', le point B' de la courbe mobile venait prendre la position B, lorsque N' coïncidait avec N.

Or les arcs MB', MB étant tangents, le point B' peut être considéré comme appartenant à l'arc MB, en négligeant les

infiniment petits du second ordre. Donc on peut prendre M′B pour la différence MB — MB′, ou l'arc de glissement. Mais B′B peut aussi être regardé comme un arc de cercle décrit du centre A avec le rayon n, pendant que le système tourne de l'angle O + O′ pour arriver à sa seconde position.

Donc

$$MB - MB' = n(O + O') = n\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

CHAPITRE XXII.

CERCLE OSCULATEUR.

172. De même qu'il a été intéressant de chercher la limite de la direction suivant laquelle on passe d'un point d'une courbe à un autre infiniment voisin, et que nous avons appelée la *direction même de la courbe en ce point*, de même il est naturel de chercher le cercle, c'est-à-dire la ligne la plus simple après la droite, qui serait la limite de ceux qui, ayant un point donné commun avec une courbe, ont encore dans le voisinage autant de points communs avec elle que le comporte la nature du cercle. De là ce problème :

Trouver la limite des cercles qui passent par un point donné d'une courbe, et par deux autres points de la même courbe, infiniment voisins du premier.

Ce cercle limite se nomme *cercle osculateur*.

Soient M (*fig.* 82) un point d'une courbe quelconque ; N, P deux autres de ses points infiniment voisins du premier ; faisons passer un cercle par ces trois points. On sait que dans tout cercle un arc est égal au produit du diamètre par l'angle inscrit opposé : d'après cela, en désignant par r le rayon du cercle qui passe par les points M, N, P, on aura, en désignant l'arc de cercle par MP, et observant que l'angle inscrit est égal à l'angle extérieur N,

$$2r = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{N}},$$

et l'on pourrait encore prendre le rapport de la corde au sinus de N.

Mais nous avons vu que l'angle extérieur N est égal à la moitié de la courbure ω de l'arc MP de la courbe, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet angle; et d'ailleurs le rapport de l'arc de cercle MP à l'arc de la courbe a pour limite l'unité, puisque leur corde est la même. La limite de $\frac{MP}{N}$ est donc la même que celle de $\frac{\text{arc MP}}{\frac{\omega}{2}}$, arc MP désignant l'arc de la courbe donnée.

Si donc on représente par R la limite de r, ou le rayon du cercle osculateur, on aura

$$R = \lim \frac{\text{arc MP}}{\omega},$$

ce qui n'est autre chose que le rayon du cercle de courbure. Il est d'ailleurs évident que ce cercle est tangent à la courbe en M, puisque la limite de la direction MN sera une tangente commune.

Le cercle osculateur se confond donc avec le cercle de courbure.

Remarque. — Nous devons faire ici une observation importante. Les raisonnements précédents n'imposent aucune condition à la position du point N entre M et P; elle peut diviser l'arc MP en deux parties du même ordre ou d'un ordre différent; l'angle extérieur pouvant toujours être remplacé par la moitié de la courbure de l'arc MP, on arrivera toujours au même résultat. On pourrait, par conséquent, faire coïncider M et N, c'est-à-dire mener un cercle tangent en M à la courbe et passant par le point infiniment voisin P, et l'on trouverait le même cercle limite.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut reconnaître directement; il suffira de remplacer l'angle N par celui de la tangente en M avec la corde MP : le diamètre du cercle variable sera le rapport de l'arc de cercle MP à cet angle, qui peut être remplacé par la moitié de la courbure de l'arc MP de la courbe. *On trouve donc encore même limite pour le cercle tangent en* M *à la courbe, et passant par un autre point de la courbe infiniment voisin du premier.*

173. On peut donner pour le rayon du cercle osculateur une formule dépendant des accroissements de l'ordonnée et de l'arc de la courbe, correspondant à ceux de l'abscisse.

Les deux points infiniment voisins du premier pouvant être pris d'une manière quelconque sans changer le résultat, nous supposerons qu'ils correspondent à deux accroissements successifs égaux de l'abscisse. Soient h la valeur d'un de ces accroissements; l l'accroissement correspondant de l'arc; k l'accroissement correspondant de y; k_1 l'accroissement de cet accroissement quand on y change x en $x+h$; soient M, M′, M″ (*fig.* 83) les trois points de la courbe, O le centre du cercle qu'ils déterminent, R son rayon, MH, M′H′ les accroissements correspondants h, k des coordonnées rectangulaires de M; M′H, M″H′ les accroissements de ces mêmes coordonnées à partir de M′, de sorte que, d'après ce qui précède, on ait $M'H' = h$, $SM'' = k_1$. L'accroissement l de l'arc, à partir de M, pourra être remplacé par la corde MM′, ou son égale M′S, dans les rapports dont on cherchera les limites.

Dans les deux triangles OIM″, MM′H dont les angles tendent vers les mêmes limites, les rapports des côtés ont les mêmes limites; et, comme nous le savons, nous pourrons sans inconvénient les regarder comme égaux : les calculs seront plus simples et les résultats ne seront pas altérés;

nous écrirons donc la relation

$$\frac{M''I}{R} = \frac{MH}{MM'} \quad \text{ou} \quad \frac{M''I}{R} = \frac{h}{l}.$$

Les deux sécantes SL, SM donneront la proportion

$$\frac{SL}{SM} = \frac{SM'}{SM''} \quad \text{ou} \quad \frac{2M''I + k_1}{2l} = \frac{l}{k_1}.$$

Éliminant M''I, il vient

$$R = \frac{l^3}{hk_1^2 + \frac{lk_1^3}{2}}.$$

Observant que le second terme du dénominateur est infiniment petit par rapport au premier, on aura, pour la limite de R ou pour l'expression du rayon de courbure,

$$\lim \frac{l^3}{hk_1^2}.$$

RÉSUMÉ DU LIVRE I.

Nous avons établi dans ce Livre les principes fondamentaux de la méthode des limites. Nous avons montré comment les anciens avaient introduit la notion des limites, et l'usage qu'ils en faisaient pour ramener la mesure de certaines grandeurs à celle d'autres grandeurs plus simples; comment les modernes avaient rendu plus facile le passage de la relation des variables à celle de leurs limites, ou des quantités proposées. Nous avons fait voir comment Archimède avait considéré les grandeurs comme limites, soit de séries, soit de sommes de quantités infiniment petites, et nous avons donné des exemples variés de ces procédés. Nous

avons considéré ensuite l'emploi que les modernes seuls ont fait des infiniment petits comme termes de rapports, et nous avons montré comment ils y ont été conduits naturellement par le problème des tangentes, qu'ils ont envisagé sous un autre point de vue que les anciens. Mais nous avons fait voir par divers exemples que les limites des rapports d'infiniment petits se présentaient dans bien d'autres recherches que celles des tangentes.

Nous avons fait ressortir l'avantage que présente l'emploi des infiniment petits dans les limites de sommes ou de rapports, et qui consiste en ce qu'on peut leur substituer des quantités infiniment petites inégales, mais qui n'en diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles-mêmes. Ce principe facilite beaucoup les calculs en ce qu'il permet de négliger des quantités dont l'expression serait quelquefois très-compliquée et entièrement inutile pour la détermination du résultat que l'on a en vue.

Dans les applications que nous avons faites des infiniment petits à l'étude des théories géométriques et mécaniques, ces quantités se sont souvent présentées comme les accroissements correspondants de variables liées entre elles par des relations connues. Nous sommes parvenus à la détermination des limites des sommes ou des rapports de ces quantités par des procédés indiqués par la nature de la question, mais qui ne se rattachaient pas à des méthodes générales. Nous allons actuellement nous occuper spécialement de ces méthodes générales, dont l'utilité doit être beaucoup mieux sentie, d'après toutes les applications que nous savons qu'elles auront.

LIVRE II.

CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS.

CHAPITRE PREMIER.

DES DÉRIVÉES, DES DIFFÉRENCES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. NOTATIONS.

174. Nous avons démontré (n° 69) que le rapport des accroissements infiniment petits correspondants d'une fonction et de la variable dont elle dépend tend en général vers une limite déterminée, et nous avons nommé cette limite *dérivée de la fonction par rapport à la variable indépendante.*

L'accroissement positif ou négatif d'une variable quelconque, dépendante ou indépendante, se nomme la *différence* de cette variable, et se désigne par la caractéristique Δ suivie de la lettre qui représente la variable.

Ainsi Δx, Δy, Δz,... représentent les différences ou accroissements des variables x, y, z,....

La dérivée d'une fonction se désigne, comme nous l'avons déjà dit, par la lettre même qui désigne cette fonction affectée d'un accent : de sorte que les dérivées par rapport à x des fonctions $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$,... s'écriront ainsi

$$F'(x),\quad f'(x),\quad \varphi'(x),\ldots,$$

ou encore

$$DF(x), \quad Df(x), \quad D\varphi(x), \ldots.$$

Ainsi, d'après la notation des différences, si l'on désigne une fonction quelconque $F(x)$ par y, on aura, en supposant que Δx et Δy tendent vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) = Dy,$$

et, par conséquent, en représentant par α une certaine quantité tendant vers zéro en même temps que Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \alpha, \quad \text{et} \quad \Delta y = F'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

175. Cette dernière expression nous fait voir que l'accroissement infiniment petit d'une fonction quelconque peut être considéré comme composé de deux parties, dont l'une $\alpha\Delta x$ est infiniment petite par rapport à l'autre, qui est $F'(x)\Delta x$. Or nous savons que les limites des sommes ou des rapports d'infiniment petits ne sont pas altérées lorsqu'on remplace ces infiniment petits par d'autres, qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux. Donc, toutes les fois que Δy entrera dans un calcul comme terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherchera la limite, on pourra le remplacer par $F'(x)\Delta x$, c'est-à-dire par le produit de la dérivée de y par l'accroissement infiniment petit de la variable indépendante x.

On donne le nom de *différentielles* à ces quantités que l'on peut substituer aux différences infiniment petites des fonctions. Elles sont plus simples, puisqu'on néglige dans celles-ci le terme $\alpha\Delta x$ qui est presque toujours excessivement compliqué. Ce sont même les plus simples quantités que l'on puisse considérer au lieu de l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement arbitraire Δx,

puisque c'est le simple produit de ce Δx par une fonction où Δx n'entre pas.

Les *différentielles*, ces quantités infiniment petites, plus simples, que l'on peut substituer aux différences elles-mêmes, se désignent par la caractéristique d, au lieu de Δ, et comme elles ne sont autre chose que le produit de la dérivée de la fonction par l'accroissement de la variable, on aura

$$dy = F'(x)\Delta x \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{\Delta x} = F'(x);$$

la différentielle est donc une quantité dont le rapport à l'accroissement de la variable est égal à la limite du rapport de la différence de la fonction à ce même accroissement. On voit que la recherche de la dérivée ou celle de la différentielle d'une fonction sont une seule et même question.

176. Si l'on suppose que la fonction y soit x lui-même, on aura

$$\Delta y = \Delta x, \quad F'(x) = 1, \quad \text{et} \quad dy = \Delta x.$$

Ainsi la différentielle de la fonction y, qui dans ce cas est x, est identique à Δx, c'est-à-dire que l'on a

$$dx = \Delta x;$$

et, comme il est plus naturel d'employer une seule caractéristique quand cela est possible, toutes les fois qu'il s'agira de différentielle de fonctions de x, nous représenterons l'accroissement de x par dx; et, lorsqu'il s'agira des accroissements exacts désignés par la caractéristique Δ, nous représenterons l'accroissement de x par Δx.

Remarque. — Si, dans une même question, on a à considérer une variable indépendante x et plusieurs fonctions y, z, u, v,... de cette variable; que l'on représente par

Δy, Δz, Δu, Δv,.... les accroissements de ces fonctions, correspondant à un même accroissement Δx de x; et par dy, dz, du, dv,.... leurs différentielles correspondant à l'accroissement Δx ou dx de x, toutes ces différentielles seront dans des rapports constants avec dx et, par conséquent, les unes avec les autres, à mesure que dx tendra vers zéro. Ces rapports constants seront évidemment les limites des rapports des différences correspondantes, qui ne diffèrent des différentielles que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes.

Ainsi, par exemple, on aura

$$\frac{dv}{dy} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta y},$$

de sorte que $\frac{dv}{dy}$ est la dérivée de v par rapport à y, quelle que soit la variable commune par rapport à laquelle on ait pris les différentielles dv et dy. Ce qu'on peut encore exprimer d'une autre manière en observant que $\frac{dv}{dy}$ est le rapport de $\frac{dv}{dx}$ à $\frac{dy}{dx}$, et l'on obtient cette proposition : que *la dérivée d'une variable v par rapport à une autre variable y est égale au rapport des dérivées de v et y par rapport à une même variable quelconque x, dont elles peuvent être considérées comme dépendantes.*

Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

177. La manière dont une quantité peut dépendre d'une autre est susceptible d'une variété indéfinie. Parmi toutes les formes possibles de fonctions, on en a choisi un certain nombre très-limité, auxquelles on est convenu de chercher à ramener toutes les autres. Elles sont telles, que, soit par

les premières opérations de l'Arithmétique, soit au moyen des Tables construites d'avance, on peut, avec un degré suffisant d'approximation, obtenir leurs valeurs correspondant à des valeurs numériques quelconques de la variable dont elles dépendent.

Ces fonctions, que l'on désigne sous le nom de *fonctions simples,* sont les suivantes, dans lesquelles a désigne une quantité indépendante de la variable x : $a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^m (m étant un nombre réel quelconque), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$; et les fonctions inverses $\log x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,séc} x$, $\operatorname{arc\,coséc} x$.

Une fonction quelconque de x peut être soumise aux opérations qui constituent une nouvelle fonction; on a alors une fonction d'une fonction de x. En la considérant elle-même comme une variable, on peut encore la soumettre aux opérations qui constituent une nouvelle fonction, et ainsi de suite. Les fonctions obtenues de cette manière se nomment, en général, des *fonctions de fonctions.*

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs fonctions de x, on la nomme une *fonction composée de* x, et c'est le cas le plus général des fonctions *explicites,* c'est-à-dire de celles qui sont l'indication d'opérations qu'on sait effectuer.

Dans tous les cas, lorsque deux fonctions, renfermant un nombre quelconque de variables dépendantes d'une seule, sont toujours égales, quelque valeur qu'on donne à cette variable, il est clair que leurs accroissements correspondants sont toujours égaux, et que, par conséquent, leurs dérivées par rapport à cette variable le sont aussi, ainsi que leurs différentielles.

D'où il résulte que, *quand une équation a lieu pour toute valeur de la variable indépendante, les dérivées ou les différentielles de ses deux membres par rapport à cette variable sont égales, quelque valeur qu'on lui donne.*

Nous allons faire connaître les principes au moyen desquels la détermination des différentielles ou des dérivées de toutes ces fonctions se ramène à celles des différentielles ou des dérivées des fonctions simples.

Différentiation des fonctions de fonctions.

178. Considérons une fonction u de x, déterminée par la suite d'équations

$$u = \mathrm{F}(z), \quad z = f(y), \quad y = \varphi(x),$$

et cherchons sa dérivée par rapport à x, ou la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, dont les deux termes tendent vers zéro, opération qu'on appelle *différentiation*. Soient Δu, Δz, Δy les accroissements de u, z, y, correspondant à l'accroissement Δx de x; on aura identiquement

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

d'où, en observant que la limite d'un produit est le produit des limites

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta z} \lim \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{F}'(z) f'(y) \varphi'(x).$$

Donc la dérivée de u par rapport à x est le produit des dérivées de u par rapport à z, de z par rapport à y, et de y par rapport à x.

Si l'on représente la dérivée de u par rapport à x par le rapport des différentielles, on aura

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{F}'(z) f'(y) \varphi'(x),$$

ou

$$du = \mathrm{F}'(z) f'(y) \varphi'(x)\, dx.$$

C'est en cela que consiste le principe de la différentiation des fonctions de fonctions. Il a lieu évidemment, quel que soit le nombre des fonctions accumulées; et il ramène à la simple différentiation de chacune de ces fonctions, considérée isolément.

Remarque. — Si y et z sont des fonctions de x et qu'on ait l'équation

$$\varphi(z) = \psi(y),$$

les deux fonctions φ et ψ étant égales, quel que soit x, ont même dérivée par rapport à x; on a donc

$$\varphi'(z)\frac{dz}{dx} = \psi'(y)\frac{dy}{dx},$$

ou

$$\varphi'(z)dz = \psi'(y)dy,$$

dz et dy étant les différentielles et non les accroissements exacts de z et y correspondant à l'accroissement indépendant donné à x, de sorte que l'on n'aurait pas

$$\varphi'(z)\Delta z = \psi'(y)\Delta y.$$

Différentiation des fonctions inverses.

179. Si l'on désigne une fonction $F(x)$ par y, c'est-à-dire si l'on pose

$$y = F(x),$$

et qu'en résolvant par rapport à x on en tire

$$x = \varphi(y),$$

on dit que les fonctions F et φ sont inverses l'une à l'autre.

Cela posé, ces deux équations étant les mêmes sous une forme différente, elles donneront les mêmes accroissements correspondants pour x et y. Soient Δx, Δy ces accroisse-

ments, on aura

$$F'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[F(x)]};$$

d'où il résulte que, pour avoir la dérivée d'une fonction $F(x)$ inverse de la fonction $\varphi(x)$, dont on sait trouver la dérivée, il suffira de prendre la réciproque de la fonction dérivée φ', et de placer sous ce signe la fonction proposée $F(x)$.

CHAPITRE II.

EXPRESSION DE L'ACCROISSEMENT INFINIMENT PETIT D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES DÉPENDANTES OU INDÉPENDANTES.

180. Considérons une fonction y qui dépende de deux variables u, v, et soit

$$y = F(u, v).$$

Si l'on donne à u et v des accroissements infiniment petits Δu, Δv dépendants ou indépendants l'un de l'autre, suivant que u et v le seront eux-mêmes, l'accroissement correspondant de y sera

$$\Delta y = F(u + \Delta u,\ v + \Delta v) - F(u, v)$$

et pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta y = {} & F(u + \Delta u, v) - F(u, v) \\ & + F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes peuvent s'écrire ainsi

$$\frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u}\Delta u.$$

Le coefficient de Δu ne diffère que d'une quantité infiniment petite de la dérivée $F(u, v)$ par rapport à u, v étant considéré comme constant. Soit $F_1(u, v)$ cette dérivée, que l'on appelle *dérivée partielle* de $F(u, v)$ ou de y par rapport à u; l'expression précédente pourra se mettre sous la forme

$$[F_1(u, v) + \alpha]\Delta u,$$

α désignant une quantité qui devient nulle avec Δu.

La seconde partie peut se mettre sous la forme

$$\frac{F(u+\Delta u, v+\Delta v) - F(u+\Delta u, v)}{\Delta v}\Delta v.$$

Le coefficient de Δv ne différera de la dérivée de $F(u+\Delta u, v)$ par rapport à v considéré comme seule variable que d'une quantité β qui deviendra nulle avec Δv. Soit $F_2(u, v)$ la dérivée partielle de $F(u, v)$ par rapport à v; on pourra donc mettre la seconde partie de Δy sous la forme

$$[F_2(u+\Delta u, v) + \beta]\Delta v,$$

β devenant nul avec Δv.

Mais $F_2(u+\Delta u, v)$ ne diffère de $F_2(u, v)$ que d'une quantité qui deviendra nulle avec Δu; l'ajoutant avec β, et en désignant leur somme par α', la seconde partie de Δy aura pour valeur

$$[F_2(u, v) + \alpha']\Delta v;$$

et par conséquent, en réunissant les deux parties de Δy,

$$\Delta y = [F_1(u, v) + \alpha]\Delta u + [F_2(u, v) + \alpha']\Delta v.$$

Or $\alpha\Delta u$, étant infiniment petit par rapport à la première partie, l'est par rapport à Δy lui-même; et il en est de même de $\alpha'\Delta v$, que Δu et Δv soient dépendants ou indépendants l'un de l'autre. Donc, en désignant par ω une quantité infiniment petite par rapport à Δy, on aura

$$\Delta y = F_1(u, v)\Delta u + F_2(u, v)\Delta v + \omega.$$

On représente les dérivées partielles $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ par $\frac{dF(u, v)}{du}$, $\frac{dF(u, v)}{dv}$, ou $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$; mais il faut bien se rappeler que ces deux dy sont différents et représentent les différentielles de y relatives à la variation d'une seule des quantités u, v : on les nomme les différentielles partielles de y par

rapport à u ou à v. Euler avait proposé d'écrire ainsi ces dérivées partielles : $\left(\frac{dy}{du}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$. On a supprimé, depuis, ces parenthèses, parce qu'avec un peu d'attention toute méprise est impossible. L'équation précédente s'écrira alors de cette manière

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \omega;$$

et il bon de se rappeler que ω se compose d'abord d'une partie qui, divisée par Δu, devient encore nulle quand on y fait $\Delta u = 0$, et d'une autre partie qui, après avoir été divisée par Δv, contient des termes qui deviennent nuls, les uns quand on y fait $\Delta u = 0$, et les autres quand on y fait $\Delta v = 0$.

On aurait des résultats analogues pour un nombre quelconque de variables u, v,..., soit entièrement indépendantes, soit dépendantes les unes des autres, ou d'autres variables quelconques.

Différentiation des fonctions composées.

181. Soient

$$y = F(u, v, w, \ldots)$$

et

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = \psi(x), \ldots;$$

y sera alors une fonction composée relativement à x.

Pour avoir sa dérivée, on remarquera que, d'après ce qui précède, on a, en supposant les accroissements infiniment petits,

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \frac{dy}{dw}\Delta w + \ldots + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δy.

Divisant par Δx et passant aux limites, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \ldots,$$

expression dans laquelle il ne faut pas oublier que $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$ sont les dérivées partielles de la fonction y. Si x entrait explicitement dans $F(u, v, w, \ldots)$, par exemple si u n'était autre chose que x, $\frac{dy}{du}$ deviendrait $\frac{dy}{dx}$ et serait la dérivée partielle de la fonction par rapport à x; tandis que le $\frac{dy}{dx}$ du premier membre est la dérivée totale de la fonction dans laquelle on fait varier toutes les quantités dépendantes de x. On ne se méprendra jamais sur le sens de ces notations : c'était pour éviter toute crainte à ce sujet qu'Euler avait proposé, comme nous l'avons dit, de mettre entre deux parenthèses les dérivées partielles; mais on a renoncé à cette précaution.

L'équation ci-dessus donne, en multipliant les deux membres par dx,

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \ldots,$$

que l'on écrit quelquefois ainsi

$$dy = d_u y + d_v y + d_w y + \ldots.$$

On peut donc énoncer ainsi le principe de la différentiation des fonctions composées :

La différentielle d'une fonction composée est égale à la somme de ses différentielles partielles, relatives à chacune des variables qui y entrent explicitement.

Quant aux différentielles du, dv,... de ces dernières,

elles se rapportent toutes à la différentielle dx de la variable unique dont elles dépendent.

182. *Théorème des fonctions homogènes.* — La différentiation des fonctions composées donne la démonstration d'un théorème remarquable sur les fonctions homogènes. On dit qu'une fonction de plusieurs variables est homogène et du degré m lorsque, en multipliant chaque variable par une indéterminée t, la fonction se trouve multipliée par t^m.

Cela posé, soient $u = F(x, y, z, \ldots)$ une fonction homogène et du degré m, et $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\psi(x, y, z, \ldots), \ldots$ ses dérivées partielles par rapport à $x, y, \ldots$; on aura, d'après la définition précédente,

$$(1) \qquad F(tx, ty, tz, \ldots) = t^m F(x, y, z).$$

Différentiant les deux membres par rapport à la variable t seulement, il vient

$$\varphi(tx, ty, tz \ldots)x + \psi(tx, ty, tz, \ldots)y + \ldots = mt^{m-1}F(x, y, z);$$

faisant $t = 1$ dans cette identité, on aura la suivante

$$(1) \qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = mu.$$

C'est en cela que consiste le théorème des fonctions homogènes.

On peut remarquer que, si dans l'identité (1) on suppose $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{F(x, y, z, \ldots)}{x^m} = F\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right).$$

Ainsi une fonction homogène de degré m, divisée par la puissance m d'une des variables, ne dépend plus que des rapports des autres variables à la première.

Différentielle d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

183. La règle précédente, appliquée à une somme de termes, montre que la différentielle d'une pareille fonction est la somme des différentielles de chacun de ses termes, ce qui était d'ailleurs évident de soi-même.

Si l'on suppose maintenant $y = uvw\ldots$, la même règle donnera, en observant qu'en général $d[\mathrm{AF}(x)] = \mathrm{A}\,d\mathrm{F}(x)$, si A est un coefficient constant,

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots,$$

ou

$$dy = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right)\ldots.$$

Soit encore $y = \frac{u}{v}$, d'où $vy = u$. En prenant les différentielles des deux membres, on aura

$$y\,dv + v\,dy = du,$$

d'où

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{y\,dv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2};$$

ce que l'on peut écrire ainsi

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Ces trois règles sont d'un usage très-fréquent.

Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples.

184. Considérons maintenant une fonction explicite quelconque de x : elle indique une suite d'opérations à effectuer, dès que l'on aura choisi arbitrairement une va-

leur numérique pour x. Celle de ces opérations qui doit se faire la dernière, et dont le résultat est la valeur de la fonction, porte soit sur une seule, soit sur deux quantités variables avec x; dans ce dernier cas, la dérivée de cette fonction se ramène, par le théorème des fonctions composées, au cas où une seule des deux quantités serait variable, et alors on n'a plus à considérer qu'une fonction simple. Si donc on savait trouver les dérivées de toutes les fonctions simples, on saurait trouver celle de la fonction proposée, au moyen des dérivées des quantités sur lesquelles doit s'exécuter la dernière opération. La question est donc ramenée à déterminer ces dérivées, qui sont celles de fonctions moins compliquées que la proposée, et qui se ramèneront semblablement à d'autres fonctions encore moins compliquées, jusqu'à ce que l'on parvienne à des fonctions simples.

Tout se réduit donc à la différentiation de ces dernières, et c'est de quoi nous allons nous occuper présentement.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS SIMPLES.

185. *Différentielle de* $\log x$. — Soit $y = \log x$; ce logarithme étant pris dans une base quelconque a, on aura

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Posons $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, et substituons dans le second membre, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha x}.$$

Or on sait que, lorsque α tend vers zéro (*voir* la note III à la fin), $\frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha}$ tend vers $\log e$, e désignant la base du système de Néper. Donc la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $\frac{\log e}{x}$.

On peut donc écrire

$$\mathrm{D}\log x = \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{\log e}{x}\,dx.$$

Si l'on observe que $\log e = \frac{1}{\mathrm{l}\,a}$, l désignant les logarithmes

népériens, on pourra écrire

$$dy = \frac{dx}{x\,\mathrm{l}a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}a};$$

si $a = e$, on aura $y = \mathrm{l}x$,

$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Dans le cas où $a = 10$, le module $\log e$ a pour valeur $\log e = 0{,}4342945\ldots$.

186. *Différentielle de a^x.* — Soit maintenant la fonction inverse $y = a^x$. D'après la règle donnée en général pour les fonctions inverses, et dont on pourrait refaire la démonstration sur chaque cas particulier, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x \mathrm{l}a,$$

et, par suite,

$$dy = a^x \mathrm{l}a\,dx.$$

On pourrait aussi trouver directement la différentielle de a^x, et en déduire celle de la fonction inverse $\log x$. En effet, si l'on a $y = a^x$, on aura

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Tout se réduit donc à trouver la limite de $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, ou, pour plus de commodité, de $\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$, α tendant vers zéro.

Posons

$$a^\alpha - 1 = \beta, \quad \text{d'où} \quad a^\alpha = 1 + \beta,$$

il faudra trouver la limite de $\frac{\beta}{\alpha}$; pour cela on remplacera α par sa valeur en β, donnée par l'équation précédente, d'où l'on tire

$$\alpha \mathrm{l} a = \mathrm{l}(1+\beta);$$

il en résulte

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\mathrm{l}(1+\beta)} \mathrm{l} a,$$

d'où $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \mathrm{l} a$, et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \mathrm{l} a = \mathrm{D} a^x, \quad \text{et} \quad dy = a^x \mathrm{l} a \, dx.$$

187. *Différentielle de x^m.* — Soit $y = x^m$; on aura, en prenant les logarithmes des deux membres dans la base e,

$$\mathrm{l} y = m \mathrm{l} x;$$

prenant maintenant les différentielles des deux membres, il vient

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x}, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{my}{x} dx.$$

Remplaçant y par x^m, on aura, quel que soit m,

$$dy = m x^{m-1} dx, \quad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$$

Si y et x n'étaient pas positifs, les logarithmes seraient imaginaires; on évitera cette difficulté en élevant au carré les deux membres de l'équation $y = x^m$, ce qui donne

$$y^2 = (x^2)^m$$

et, prenant les logarithmes,

$$\mathrm{l} y^2 = m \mathrm{l} x^2.$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$\frac{d(y^2)}{y^2} = m \frac{d(x^2)}{x^2};$$

et, comme on reconnaît facilement que l'on a

$$d(y^2) = 2y\,dy, \quad d(x^2) = 2x\,dx,$$

cette équation deviendra

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dx}{x},$$

et, par suite,

$$dy = mx^{m-1}dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

comme dans le premier cas.

Dans le cas particulier de $m = -1$, on trouve

$$d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

On peut parvenir directement à la dérivée ou à la différentielle de x^m. En effet, cette dérivée est la limite de

$$\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} \quad \text{ou de} \quad x^m \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\Delta x};$$

posant

$$\frac{\Delta x}{x} = \alpha,$$

on aura à trouver la limite de

$$x^{m-1}\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}$$

quand α tend vers zéro. Posons $(1+\alpha)^m - 1 = \beta$; la question revient à trouver $x^{m-1} \lim \frac{\beta}{\alpha}$. Pour avoir cette limite il

faut exprimer α et β au moyen de l'équation de transformation, qui donne $ml(1+\alpha)=l(1+\beta)$.

Mais on sait que, dans la recherche des limites de rapports, on peut remplacer $l(1+z)$ par z, quel que soit l'infiniment petit z; donc

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{l(1+\beta)}{l(1+\alpha)}=m,$$

et la dérivée de x^m est mx^{m-1}. Ainsi

$$Dx^m=mx^{m-1}.$$

Remarque. — La limite de $\frac{\beta}{\alpha}$ étant m, on a $\frac{\beta}{\alpha}=m(1+\omega)$, ω tendant vers zéro avec α. On aura donc, quel que soit m,

$$\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}=m(1+\omega)\quad\text{ou}\quad(1+\alpha)^m=1+m\alpha(1+\omega),$$

et l'on pourra remplir $(1+\alpha)^m-1$ par $m\alpha$ sans altérer les limites des rapports.

188. *Différentielles de $\sin x$, $\tang x$, $\sécx$.* — Les lignes trigonométriques étant des fonctions de l'arc correspondant (*voir*, dans les applications géométriques, l'article sur la longueur des lignes courbes), nous pouvons chercher l'expression de leurs différentielles correspondant à celle de l'arc. Dans tous ces calculs nous supposerons que le rayon soit pris pour unité.

1° Soit d'abord

$$y=\sin x,$$

il en résultera

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Or, lorsqu'un arc tend vers zéro, le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, ainsi que le rapport de la tangente à l'arc, ou du sinus à la tangente; donc

$$\lim \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 :$$

la limite du second membre est donc $\cos x$.

On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \text{ou} \quad \mathrm{D} \sin x = \cos x;$$

on en déduit

$$dy = \cos x \, dx,$$

ou

$$d \sin x = \cos x \, dx.$$

2° Soit maintenant $y = \operatorname{tang} x$; on aura

$$\Delta y = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} \Delta x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x} - \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} \Delta x (1 + \operatorname{tang}^2 x)}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x},$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang} \Delta x}{\Delta x} \, \frac{1 + \operatorname{tang}^2 x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \Delta x};$$

et passant aux limites,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

ainsi

$$\mathrm{D} \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et, par suite,

$$dy = d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On arriverait au même résultat en considérant que $\operatorname{tang} x$ égale $\frac{\sin x}{\cos x}$, et appliquant la règle pour différentier les fractions.

Soit enfin $y = \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}$; on aura, par la règle des fractions,

$$dy = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x\, dx :$$

ainsi $d \operatorname{séc} x = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x\, dx$, et $\mathrm{D} \operatorname{séc} x = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x$.

On y parviendra encore en observant que

$$\Delta y = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x},$$

et développant les calculs comme dans les cas précédents.

3° *Différentielles de* $\cos x$, $\cot x$, $\operatorname{coséc} x$. — Considérons maintenant les mêmes fonctions du complément $\frac{\pi}{2} - x$ de l'arc x.

Observons pour cela que l'on aura en général, en regardant $\frac{\pi}{2} - x$ comme une fonction de x, et appliquant la règle des fonctions de fonctions,

$$d\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Ainsi, pour les trois fonctions $\cos x$, $\cot x$, $\operatorname{coséc} x$, qui ne sont autres que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{séc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, il faudra prendre les dérivées des fonctions respectives $\sin x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{séc} x$, y changer x en $\frac{\pi}{2} - x$, puis multiplier par $-dx$. On trouvera ainsi

$$d\cos x = -\sin x\, dx, \quad d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$
$$d\operatorname{coséc} x = -\cot x \operatorname{coséc} x\, dx,$$

et

$$D\cos x = -\sin x, \quad D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$D\,\text{coséc}\,x = -\cot x\,\text{coséc}\,x.$$

189. *Différentielles des fonctions trigonométriques inverses.* — Nous avons vu que, pour obtenir la dérivée d'une fonction y de x, il suffisait de diviser l'unité par la dérivée de la fonction inverse, dans laquelle on mettrait y pour variable.

D'après cela, si l'on considère les fonctions $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\,\text{tang}\,x$, $\text{arc séc}\,x$, $\text{arc}\cos x$, $\text{arc}\cot x$, $\text{arc coséc}\,x$, qui ont respectivement pour inverses

$$\sin x, \quad \text{tang}\,x, \quad \text{séc}\,x, \quad \cos x, \quad \cot x, \quad \text{coséc}\,x,$$

on trouvera

pour $y = \text{arc}\sin x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \text{arc}\,\text{tang}\,x$, $\quad dy = \cos^2 y\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \text{arc séc}\,x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\text{tang}\,y\,\text{séc}\,y} = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

pour $y = \text{arc}\cos x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\sin y} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \text{arc}\cot x$, $\quad dy = -\sin^2 x\,dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \text{arc coséc}\,x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\cot y\,\text{coséc}\,y} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il est inutile d'écrire les valeurs des dérivées. Il faut bien remarquer que les radicaux qui se sont introduits dans ces formules doivent être pris, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$; on reconnaîtra celui que l'on doit prendre, en considérant la ligne trigonométrique qui l'a introduit.

Les trois dernières différentielles sont égales aux trois

premières, en faisant abstraction des signes, qui peuvent être semblables ou dissemblables; et cela tient à ce que la somme ou la différence des deux arcs correspondants est une constante.

Les signes que nous avons donnés aux radicaux dans ces formules se rapportent au cas où l'arc est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Les différentielles des fonctions trigonométriques, ou *fonctions circulaires,* pourraient encore s'obtenir par des considérations géométriques fort simples, auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

190. Le tableau suivant renferme les différentielles de toutes les fonctions simples. Nous y représentons par la lettre caractéristique L les logarithmes dans une base quelconque, et par l ceux qui se rapportent à la base de Néper. Dans les fonctions trigonométriques inverses, les signes des radicaux supposent l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

$d\,x^n = nx^{n-1}dx$	$d \sin x = \cos x\,dx$	$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d\,\mathrm{L}x = \mathrm{L}e\,\frac{dx}{x}$	$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}$
$d\,\mathrm{l}\,x = \frac{dx}{x}$	$d \operatorname{séc} x = \operatorname{tang} x \operatorname{séc} x\,dx$	$d \operatorname{arc} \operatorname{séc} x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d\,a^x = a^x \mathrm{l}\,a\,dx$	$d \cos x = -\sin x\,dx$	$d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d\,e^x = e^x dx$	$d \cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d \operatorname{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2}$
	$d \operatorname{coséc} x = -\cot x \operatorname{coséc} x\,dx$	$d \operatorname{arc} \operatorname{coséc} x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Il est bon d'observer que ces différentielles des fonctions simples de x ne supposent nullement que x soit la variable indépendante. Elles correspondent bien à la différentielle

dx; mais celle-ci peut dépendre de celle d'une variable quelconque dont x dépendrait, comme aussi elle peut être entièrement indépendante. Ainsi l'on aurait

$$d[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1} dF(x),$$
$$d\sin[F(x)] = \cos[F(x)] dF(x), \ldots.$$

C'est cette même considération qui nous a conduits à la différentiation des fonctions de fonctions.

Différentielles des fonctions implicites.

191. Si par fonction implicite on entendait toute fonction dont la forme n'est point donnée explicitement, mais qui est déterminée complétement par les données de la question, on se jetterait dans une trop grande généralité, et il ne serait pas possible de donner des règles générales pour leur différentiation. Nous renfermerons seulement sous cette dénomination les fonctions qui sont liées aux variables dont elles dépendent, par des équations dont les deux membres sont des fonctions explicites de toutes ces quantités.

Nous considérerons d'abord le cas où l'on a une seule équation; ce cas se subdivise en deux autres, suivant que la fonction dépend d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes.

Soit d'abord la fonction y déterminée par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

Les dérivées par rapport à x des deux membres de cette équation devant être identiques, et y étant une fonction déterminée, quoique inconnue, de x, nous aurons, d'après la règle des fonctions composées,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

équation qui détermine la dérivée ou la différentielle de y,

puisque l'on peut former les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ de la fonction explicite $F(x, y)$. On aura ainsi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \quad \text{d'où} \quad dy = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}\,dx.$$

Ces valeurs de la différentielle et de la dérivée de y sont exprimées au moyen de x et y à la fois; elles ne peuvent l'être au moyen de x seul que quand on peut résoudre l'équation $F(x, y) = 0$ par rapport à y; mais néanmoins ces formules ne laissent pas que d'être d'une grande utilité dans le cas même où cette résolution est impossible.

192. Considérons maintenant $m - 1$ équations entre m variables; ce qui détermine $m - 1$ d'entre elles en fonctions de la $m^{ième}$, qui sera la seule variable indépendante.

Soient

$$\begin{aligned} &F(x, y, z, \ldots) = 0, \\ &F_1(x, y, z, \ldots) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &F_{m-2}(x, y, z, \ldots) = 0; \end{aligned}$$

on trouvera, en différentiant toutes ces équations,

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz + \ldots = 0, \\ &\frac{dF_1}{dx}\,dx + \frac{dF_1}{dy}\,dy + \frac{dF_1}{dz}\,dz + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dF_{m-2}}{dx}\,dx + \frac{dF_{m-2}}{dy}\,dy + \frac{dF_{m-2}}{dz}\,dz + \ldots = 0. \end{aligned}$$

De ces $m - 1$ équations du premier degré par rapport à dy, $dz, \ldots$, on tirera la valeur de ces $m - 1$ inconnues en fonction de $x, y, z, \ldots$ et dx; ce qui était l'objet de la question.

CHAPITRE IV.

EXPRESSION REMARQUABLE DU RAPPORT DES ACCROISSEMENTS FINIS DE DEUX FONCTIONS D'UNE MÊME VARIABLE.

193. Soient $F(x)$, $f(x)$ deux fonctions quelconques, et x_0, X deux valeurs arbitraires de x; X surpassant x_0 d'une quantité finie positive h. Il s'agit de trouver, au moyen des dérivées de ces fonctions, une expression du rapport

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)},$$

en supposant que la fonction $f(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante; ou, en d'autres termes, que sa dérivée soit constamment de même signe, pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. Admettons, pour fixer les idées, que $f'(x)$ soit constamment positive entre ces limites; soient A, B la plus grande et la plus petite valeur que prend entre ces mêmes limites le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$, que nous supposons fonction continue de x : on aura constamment

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} < A, \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} > B.$$

Multipliant par $f'(x)$ qui est positif, on aura les deux inégalités suivantes, qu'il faudrait changer de sens si $f'(x)$ était négatif,

$$F'(x) < Af'(x), \quad F'(x) > Bf'(x).$$

Le premier membre de la première inégalité est la dérivée

de $F(x)$, et le second de $Af(x)$, et par conséquent (n° 72) $F(x)$ croît moins rapidement que $Af(x)$. On a donc, si h est positif

$$F(X) - F(x_0) < A[f(X)] - f(x_0)],$$

et divisant par $f(X) - f(x_0)$, qui est positif, par hypothèse,

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} < A.$$

On trouverait ce même résultat si h était négatif, parce que l'avant-dernière inégalité changerait de sens; mais, en la divisant par $f(X) - f(x_0)$, qui serait alors négatif, elle changerait une seconde fois. L'inégalité $F'(x) > Bf'(x)$ conduit de même, dans tous les cas, à

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} > B.$$

Donc, puisque le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ est continu entre x_0 et X, ce qui arrivera évidemment, par exemple, si $F'(x)$ et $f'(x)$ le sont séparément, il existera une certaine valeur de x intermédiaire entre x_0 et X, telle que ce rapport deviendra égal à $\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)}$, qui est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que prend $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. Si l'on désigne cette valeur de x intermédiaire par $x_0 + \theta h$, θ étant une valeur comprise entre 0 et $+1$, on parviendra à la formule suivante, dont nous ferons les nombreuses applications :

$$(1) \qquad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}.$$

Si l'on avait supposé $f'(x)$ constamment négatif, les inégalités n'auraient fait que changer de sens, et n'en auraient pas moins conduit à cette même formule. Il faudra bien se

rappeler, dans les applications qu'on en fera, qu'elle suppose que $f'(x)$ soit constamment de même signe entre x_0 et x_0+h, et que le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ passe par toutes les valeurs comprises entre sa plus grande et sa plus petite, quand x passe par toutes les valeurs comprises entre x_0 et x_0+h.

194. Nous allons déduire de l'équation (1) quelques propositions qui nous seront fort utiles par la suite.

Si l'on avait, pour une valeur particulière x_0 de la variable, $F(x_0)=0$, $f(x_n)=0$, la formule (1) deviendrait, en posant $\theta h = h_1$, h_1 étant moindre que h,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}.$$

Si l'on avait, en outre, $F'(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, on aurait semblablement, en représentant par $F''(x)$, $f''(x)$ les dérivées de $F'(x)$, $f'(x)$ ou les secondes dérivées de $F(x)$, $f(x)$,

$$\frac{F'(x_0+h_1)}{f'(x_0+h_1)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)},$$

h_2 étant moindre que h_1, et en supposant que $\frac{F''(x)}{f''(x)}$ passe par toutes les valeurs entre sa plus grande et sa plus petite, et que $f''(x)$ soit toujours de même signe. On aura, par suite,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}=\frac{F''(x_0+h_2)}{f''(x_0+h_2)}.$$

Si l'on avait $F''(x_0)=0$ et $f''(x_0)=0$, on obtiendrait une formule semblable où entreraient les dérivées de $F''(x)$ et $f''(x)$ ou les troisièmes dérivées de $F(x)$, $f(x)$. En continuant ainsi, et désignant, en général, par $\varphi^m(x)$ la fonction qu'on obtient en différentiant successivement m fois la

fonction quelconque $\varphi(x)$, on verra que, si l'on a les conditions

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0,$$
$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \ldots, \quad f^{n-1}(x_0) = 0,$$

et que les rapports des dérivées de même ordre, jusqu'à l'ordre n inclusivement, passent par toutes les valeurs entre leur plus grande et leur plus petite, ce qui aura lieu s'ils sont continus, et qu'enfin les dérivées de f soient de signes constants, on aura

$$(2) \qquad \frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)},$$

θ désignant une quantité positive moindre que l'unité.

Si toutes les conditions précédentes étaient satisfaites excepté $F(x_0) = 0$, on aurait

$$(3) \qquad \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}.$$

195. Comme application de cette dernière formule, supposons que l'on ait

$$f(x) = (x - x_0)^n,$$

et que la fonction $F(x)$ ait toutes ses dérivées continues jusqu'à $F^n(x)$ inclusivement, entre x_0 et $x_0 + h$: les conditions $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0, \ldots, f^{n-1}(x_0) = 0$ seront évidemment satisfaites ; de plus $f'(x), \ldots, f^n(x)$ sont de signes constants ; et en supposant toujours que l'on ait

$$F'(x_0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0,$$

l'équation (3) devient

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h^n} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n};$$

d'où

$$(4)\qquad F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x_0+\theta h).$$

On voit que, si l'accroissement h de x tendait vers zéro, et que $F^n(x_0)$ fût fini, l'accroissement de $F(x)$, pour la valeur particulière x_0, serait infiniment petit de l'ordre n, celui de x étant du premier.

Si l'on a, en outre, $F(x_0)=0$, la formule précédente devient

$$(5)\qquad F(x_0+h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x_0+\theta h).$$

Si x_0 est zéro, cette équation se change en la suivante :

$$F(h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta h),$$

et, changeant l'indéterminée h en x,

$$(6)\qquad F(x)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x),$$

en admettant les conditions

$$F(0)=0,\quad F'(0)=0,\ldots,\quad F^{n-1}(0)=0.$$

On peut remarquer qu'on aurait semblablement

$$F'(x)=\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(\theta_1 x),$$

et que, par conséquent, dans ce cas, $F(x)$ *est infiniment petit par rapport à* $F'(x)$.

Si l'on n'avait pas $F(x_0)=0$, on obtiendrait, au lieu de l'équation (6),

$$(7)\qquad F(x)-F(0)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x).$$

196. Nous déduirons de ce qui précède un corollaire très-

simple, et qui nous servira par la suite. Il consiste en ce que, si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ tend vers zéro en même temps que x, et que $F(x)$, $F''x)$, ..., $F^n(x)$ soient continus entre o et x, la fraction $\frac{F(x)}{x^n}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{F^n(\theta x)}{1.2...n}$. En effet, il résulte d'abord de l'hypothèse que l'on doit avoir

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(0) = 0;$$

car sans cela $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ serait infini, pour $x = 0$. On peut donc appliquer ici la formule (6), et l'on voit, par conséquent, que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ devient nul pour $x = 0$, on aura

$$\frac{F(x)}{x^n} = \frac{F^n(\theta x)}{1.2...n}.$$

197. L'équation (4), dans laquelle on suppose $n = 1$, devient, en remplaçant par x la quantité arbitraire x_0,

$$(8) \qquad F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h).$$

Elle conduit immédiatement à une conséquence déjà obtenue précédemment, savoir : qu'*il n'y a qu'une expression indépendante de x dont la dérivée par rapport à x soit nulle quel que soit x.*

En effet, soit $F(x)$ une fonction telle, que pour toute valeur de x on ait $F'(x) = 0$; l'équation désignée montre que, quels que soient x et $x+h$, on aura

$$F(x+h) - F(x) = 0,$$

puisque $F'(x+\theta h)$ est nul par hypothèse. Donc $F(x) = F(x+h)$, et par conséquent la fonction $F(x)$, a toujours la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable; elle est donc constante relativement à x, ou, en d'autres termes, elle ne dépend pas de x.

D'où résulte, comme nous l'avons déjà dit, que *deux fonctions qui ont la même dérivée par rapport à une même variable, ne peuvent différer que par une constante,* c'est-à-dire par une quantité indépendante de cette variable. En effet, la dérivée de la différence de ces deux fonctions, étant la différence de leurs dérivées, est nulle d'elle-même, d'après l'hypothèse; donc cette différence est une constante, comme il fallait le démontrer.

198. Nous terminerons par cette proposition très-importante, que *si* $F(x, y)$ *tend vers zéro quel que soit* x, *quand on fait tendre* y *vers une certaine valeur particulière* a, *toutes les dérivées de* $F(x, y)$ *par rapport à* x *tendront aussi vers zéro, en même temps que* y *vers* a.

En effet, pour toute valeur de x et de h, on aura, en vertu de l'équation (8),

$$(9) \qquad F(x+h, y) - F(x, y) = hF'(x+\theta h, y),$$

la dérivée étant prise par rapport à x, et supposée continue et déterminée pour toute valeur de x et y.

Or les deux termes du premier membre deviennent nuls pour $y = a$; donc $F'(x+\theta h, a) = 0$.

Et comme x et h sont arbitraires, on peut affirmer que $x+\theta h$ peut prendre toutes les valeurs possibles, bien qu'on ne connaisse pas la valeur de θ; car $x+\theta h$ est toujours compris entre x et $x+h$, et l'on peut faire en sorte que x et $x+h$ comprennent toujours entre eux une valeur arbitraire x' et s'en rapprochent indéfiniment; d'où il suit que $x+\theta h$ peut s'approcher indéfiniment de x', et que, par conséquent, $F'(x, a)$ est nul, quel que soit x, si $F'(x, y)$ est continue par rapport à x et y.

De là on déduira semblablement que $F''(x, a)$ est nul quel que soit x, et qu'il en est de même, en général, de $F''(x, a)$. Et il est évident qu'il en sera de même pour une

fonction $F(x, y, z, \ldots)$ qui tend vers zéro, quel que soit x, quand y, z,... tendent respectivement vers a, b,....

199. Il est encore utile de remarquer que, si h tend vers zéro et y vers a, le second membre de l'équation (9) sera infiniment petit par rapport à h, puisque $F'(x + \theta h, y)$ tendra vers zéro; donc *la différence infiniment petite relative à x d'une fonction $F(x, y)$ qui est infiniment petite, quel que soit x, est infiniment petite par rapport à l'accroissement correspondant de x.*

CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIELLES ET DIFFÉRENCES D'UN ORDRE QUELCONQUE DE FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

200. La différentielle dy d'une fonction y de x, étant elle-même une fonction de x, aura aussi sa différentielle, et ce sera une quantité dont le rapport à la différentielle de x sera égal à la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de dy à l'accroissement correspondant de x. Pour plus de simplicité, on prendra pour la différentielle de x, dans cette nouvelle différentiation, la même valeur que dans la première; et, en général, on lui conservera toujours la même valeur pour toutes les différentiations que l'on aura à effectuer; c'est ce que l'on appelle prendre dx constant. Nous représenterons la différentielle de dy par $d\,dy$ ou d^2y, et nous l'appellerons la différentielle seconde de y par rapport à x. De même d^2y aura une différentielle que l'on désignera par d^3y, et qui s'appellera la différentielle troisième de y; et ainsi de suite.

Il faut bien se garder de confondre ces indices de différentiation avec des exposants de puissance. Les puissances successives d'une différentielle dy s'écriraient de la manière suivante :

$$dy,\quad dy^2,\quad dy^3,\ldots,\quad dy^n.$$

Rien n'est plus facile que d'exprimer les différentielles successives de la fonction $F(x)$ désignée par y, au moyen de ses dérivées.

En effet, on a d'abord

$$dy = F'(x)dx.$$

Or la différentielle de $F(x)dy$ sera le produit de dx par sa dérivée par rapport à x, laquelle est $F''(x)dx$, puisque dx est indépendant de x. On aura donc

$$d^2y = F''(x)dx^2.$$

On aura de même

$$d^3y = F'''(x)dx^3,$$

et généralement

$$d^ny = F^n(x)dx^n,$$

ou

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x);$$

de sorte que les dérivées successives d'une fonction de x peuvent être considérées comme les rapports des différentielles de même ordre de cette fonction aux puissances du même degré de dx.

On voit par là qu'une différentielle d'un ordre n quelconque est en général un infiniment petit de l'ordre n, dx étant pris pour le premier ordre, et que la détermination des dérivées successives d'une fonction ne diffère pas de celle de ses différentielles.

201. Les différentielles successives d'une fonction ont avec les différences de cette fonction des rapports qu'il est essentiel de connaître.

La différence Δy de la fonction y, étant elle-même une fonction de x, a aussi une différence; il en est de même de celle-ci, et ainsi de suite indéfiniment. Pour former ces différences successives de la fonction y, on suppose que l'on donne constamment à x le même accroissement Δx, et on les désigne de la manière suivante :

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y, \ldots, \quad \Delta^n y.$$

Les puissances de Δy seraient désignées comme il suit :

$$\Delta y, \quad \Delta y^2, \quad \Delta y^3, \ldots, \quad \Delta y^n.$$

Or la proposition que nous allons démontrer consiste en ce que l'on a généralement $\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

En effet, on a d'abord

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \omega,$$

ω devenant nul quel que soit x, quand on fait $\Delta x = 0$. Prenons maintenant les accroissements que subiront ces deux membres lorsque l'on augmentera encore x de Δx, et divisons-les par Δx; le premier donnera $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$. Quant au second, il suffira de prendre sa dérivée par rapport à x et d'y ajouter une quantité qui soit infiniment petite en même temps que Δx. Mais ω devenant nul avec Δx, quel que soit x, sa dérivée deviendra nulle en même temps, et par conséquent le second membre diffère de $F''(x)$ d'une quantité qui devient nulle avec Δx. En la désignant par ω_1, nous aurons

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F''(x) + \omega_1;$$

en prenant encore les accroissements des deux membres de cette identité, relatifs à un nouvel accroissement Δx, et les divisant par Δx, on obtiendrait semblablement

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = F'''(x) + \omega_2,$$

et généralement

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) + \omega_{n-1},$$

ω_{n-1} devenant nul avec Δx.

On a donc, en passant aux limites,

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

comme nous l'avions annoncé.

Il suit de là que si l'on fait tendre Δx vers zéro, en prenant $dx = \Delta x$, le rapport $\frac{\Delta^n y}{d^n y}$ aura pour limite l'unité, et *la différentielle de l'ordre n d'une fonction quelconque de x pourra être prise pour la différence du même ordre de cette fonction, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cette différence.*

Cette proposition est très-importante, en ce qu'elle permet de substituer les différentielles d'ordre quelconque aux différences infiniment petites de même ordre, dont l'expression serait beaucoup plus compliquée, et il n'en peut résulter aucune erreur dans les calculs où l'on ne considère que les limites des rapports ou des sommes.

Remarque. — Lorsque plusieurs fonctions, que l'on a à considérer dans une même question, dépendent toutes d'une seule variable x, les différences premières infiniment petites sont toutes déterminées par Δx, ou par une quelconque d'entre elles ; ainsi Δy désignera partout le même accroissement, soit qu'on le détermine d'après Δz ou d'après la valeur correspondante de Δx, en supposant toujours que la valeur de x soit la même. Mais le $\Delta^2 y$ n'aura pas la même valeur quand il exprimera la différence de y par rapport à x ou par rapport à z. En effet, dans le premier cas, il faut considérer les trois valeurs de y correspondant à x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$; prendre la différence de la deuxième à la première, et de la troisième à la deuxième, puis la différence de ces deux différences. Dans le second cas, il faudra considérer les trois valeurs de y qui correspondent à z, $z + \Delta z$, $z + 2\Delta z$, et agir de la même manière sur elles. Or les deux premières sont les mêmes dans les deux cas ; mais la troisième est différente, parce qu'à $x + 2\Delta x$ ne correspond pas $z + 2\Delta z$: il s'en faut d'une quantité infiniment petite par rapport à Δz, et que

l'on n'a pas le droit de négliger par rapport aux différences du second ordre.

Il est donc nécessaire de distinguer avec soin les différences désignées par $\Delta^2 y$, dans les questions où l'on ne prendrait pas toujours la même variable indépendante. Il en serait de même des ordres supérieurs.

202. Si l'on considère en particulier les fonctions

$$x^m, \quad \log x, \quad a^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

on trouvera

$$d^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n,$$

$$d^n \log x = \pm 1.2.3\ldots(n-1)\log e \frac{dx^n}{x^n},$$

$$d^n a^x = a^x \, \mathrm{l}^n a \, dx^n,$$

$$d^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n,$$

$$d^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) dx^n;$$

et il est bon de se rappeler que le second membre donne la valeur de la différence infiniment petite de l'ordre n, à une quantité près infiniment petite par rapport à cette différence.

Formule pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit. — Soit $p = uv$, u et v étant deux fonctions de x. En différentiant successivement, on trouve

$$\mathrm{D}y = u\mathrm{D}v + v\mathrm{D}u,$$

$$\mathrm{D}^2 y = u\mathrm{D}^2 v + 2\mathrm{D}u\mathrm{D}v + v\mathrm{D}^2 u,$$

$$\mathrm{D}^3 y = u\mathrm{D}^3 v + 3\mathrm{D}u\mathrm{D}^2 v + 3\mathrm{D}^2 u\mathrm{D}v + v\mathrm{D}^3 u.$$

On remarque dans ces premières formules que l'ordre des dérivées de à u est zéro pour le premier terme, et va en croissant d'une unité d'un terme à l'autre jusqu'au dernier, où il est le même que celui de la dérivée de y. L'in-

verse a lieu pour les dérivées de v ; et les coefficients sont ceux de la puissance de même ordre d'un binôme.

Or il est facile de voir que, si cette loi a lieu pour $D^n y$, elle a lieu pour $D^{n+1} y$; elle est donc générale. On peut donc écrire la formule suivante :

$$D^m uv = uD^m v + mDuD^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} D^2 u D^{m-2} v + \ldots + vD^m u,$$

ou

$$\frac{d^m uv}{dx^m} = u\frac{d^m v}{dx^m} + m\frac{du}{dx}\frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + \ldots + v\frac{d^m u}{dx^m}.$$

CHAPITRE VI.

DIFFÉRENTIELLES, DÉRIVÉES ET DIFFÉRENCES PARTIELLES DES DIVERS ORDRES, DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES. DIFFÉRENCES ET DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

203. Une fonction de deux variables indépendantes, x et y, peut être différentiée successivement par rapport à chacune d'elles partiellement, et l'on peut supposer que ces différentiations soient en nombre quelconque et se succèdent d'une manière quelconque. Le nombre de ces différentiations constitue l'*ordre* de la différentielle, de la différence ou de la dérivée. Il n'y a rien de nouveau à dire sur leur formation, puisque l'on n'a à considérer à chaque opération qu'une seule variable indépendante. Les dérivées partielles d'ordre quelconque s'exprimeront au moyen des différentielles correspondantes d'une manière entièrement semblable à celle que nous avons trouvée pour les fonctions d'une seule variable. Elles ont aussi les mêmes rapports avec les différences partielles correspondantes; et la reproduction identique des raisonnements déjà faits dans le cas où l'on considère toujours la même variable, conduit immédiatement à ces conséquences. Nous ne croyons cependant pas inutile de donner quelques développements à ce sujet.

Désignons généralement par $F^{m+n+p\ldots}_{x,y,x,\ldots}(x, y)$ ou par $D^{m+n+p\ldots}_{x,y,x,\ldots}u$ le résultat de m dérivations partielles effectuées par rapport à x sur la fonction $u = F(x, y)$, suivies de n dérivations partielles du résultat par rapport à y, lesquelles

seront elles-mêmes suivies de p dérivations par rapport à x; et ainsi de suite.

Désignons de même par $d^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u$ le résultat obtenu en prenant d'abord la différentielle partielle de l'ordre m de u par rapport à x, puis la différentielle partielle de l'ordre n par rapport à y de l'expression obtenue; et ainsi de suite. Et enfin représentons par $\Delta^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u$ le résultat obtenu en prenant d'une manière analogue les différences au lieu des différentielles. Cela posé, on aura d'abord, d'après ce que l'on a vu, en traitant les fonctions d'une seule variable, et faisant usage des notations que nous venous d'indiquer,

$$d^m_x u = \mathrm{F}^m_x(x, y)\, dx^m = \mathrm{D}^m_x u\, dx^m.$$

Considérant maintenant y comme la seule variable, et prenant la différentielle $n^{ième}$ des deux membres, on aura, de la même manière,

$$d^{m+n}_{x,y} u = \mathrm{F}^{m+n}_{x,y}(x, y)\, dx^m\, dy^n = \mathrm{D}^{m+n}_{x,y} u, \quad dx^m\, dy^n.$$

Prenant maintenant la différentielle partielle d'ordre p par rapport à x, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra

$$\begin{aligned} d^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u &= \mathrm{F}^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots}(x, y)\, dx^m\, dy^n\, dx^p \ldots \\ &= \mathrm{D}^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u\, dx^m\, dy^n\, dx^p \ldots, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u}{dx^m\, dy^n\, dx^p \ldots} = \mathrm{F}^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots}(x, y) = \mathrm{D}^{m+n+p\ldots}_{x,y,x\ldots} u.$$

Les dérivées partielles s'expriment donc au moyen des différentielles partielles correspondantes d'une manière analogue à celle qui se rapporte aux fonctions d'une seule variable.

Il y a encore évidemment le même rapport entre ces dérivées et les différences partielles correspondantes. En effet

on aura d'abord, d'après ce qui a été démontré pour les fonctions d'une seule variable,

$$\frac{\Delta^m \underset{x}{u}}{\Delta x^m} = \mathrm{F}^m_x(x, y) + \omega,$$

ω devenant nul en même temps que Δx. Prenons maintenant la différence $n^{ième}$ des deux membres par rapport à y, et divisons-la par Δy^n; il faudra, par les mêmes raisons, prendre la dérivée partielle $n^{ième}$ du second membre par rapport à y et y ajouter une quantité qui devienne nulle avec Δy. Si, de plus, on observe que, ω devenant nul avec Δx, il en est de même de sa dérivée $n^{ième}$ par rapport à y, on en conclura l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta^{m+n} \underset{x,y}{u}}{\Delta x^m \Delta y^n} = \mathrm{F}^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}(x, y) + \omega_1,$$

ω_1 devenant nul quand on suppose que Δx et Δy le deviennent tous les deux.

Prenant actuellement la différence de l'ordre p des deux membres par rapport à x, la divisant par Δx^p, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra la formule générale

$$\frac{\Delta^{m+n+p\ldots} \underset{x,y,z\ldots}{u}}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = \mathrm{F}^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}(x, y) + \varepsilon,$$

ε devenant nul quand Δx et Δy le deviennent tous les deux.

D'où l'on conclut enfin, comme pour les fonctions d'une seule variable,

$$\lim \frac{\Delta^{m+n+p\ldots} \underset{x,y,z\ldots}{u}}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = \mathrm{F}^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots}(x, y)$$

$$= \frac{d^{m+n+p\ldots} \underset{x,y,z\ldots}{u}}{dx^m dy^n dx^p \ldots} = \mathrm{D}^{m+n+p\ldots}_{x,y,z\ldots} u,$$

et il en serait de même pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Les notations que nous venons d'employer peuvent être simplifiées au moyen d'une proposition fondamentale que nous allons démontrer.

204. *De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations.* — Si l'on prend les différences successives d'une fonction par rapport aux diverses variables indépendantes qu'elle renferme, on arrivera toujours au même résultat, dans quelque ordre qu'on effectue ces opérations, pourvu qu'on ne change pas le nombre de celles qui doivent être faites respectivement par rapport à chaque variable.

Soient, en effet, x et y deux des variables dont dépend une fonction u.

Si l'on change d'abord x en $x + \Delta x$, u devient

$$u + \Delta_x u;$$

si dans cette expression on change y en $y + \Delta y$, elle devient

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u,$$

et l'on a ainsi ce que devient u quand x et y sont changés en $x + \Delta x, y + \Delta y$.

Or, en faisant les substitutions en ordre inverse, on aura

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta^2_{y,x} u,$$

et ce résultat doit être identique au précédent, puisqu'il exprime toujours la fonction u dans laquelle x et y sont changés en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

Donc on a identiquement

$$\Delta^2_{x,y} u = \Delta^2_{y,x} u.$$

Si maintenant on divise les deux membres par $\Delta x \Delta$

qu'on passe aux limites en faisant tendre Δx et Δy vers zéro, on en conclura, par ce qui précède,

$$F''_{x,y}(x, y) = F''_{y,x}(x, y),$$

ou

$$D^2_{x,y} u = D^2_{y,x} u,$$

et, par conséquent,

$$d^2_{x,y} u = d^2_{y,x} u.$$

Si l'on prend successivement un nombre quelconque de différences, de différentielles ou de dérivées partielles, il est facile de voir que l'ordre dans lequel on les prendra est complétement indifférent. En effet, deux de ces opérations successives pouvant être changées d'ordre, on pourra faire arriver au premier rang celle que l'on voudra, en la faisant avancer successivement d'un rang vers le commencement; on amènera ensuite au second rang celle que l'on voudra les autres, et enfin on les placera toutes dans un ordre quelconque, sans que le résultat cesse d'être identiquement le même.

D'après cela, on pourra supposer que toutes les différentiations par rapport à la même variable soient faites consécutivement, et les notations précédentes seront simplifiées en ce qu'elles ne renfermeront qu'une seule indication pour chaque variable : et c'est ce que nous ferons dorénavant.

On simplifie encore l'expression des dérivées partielles en écrivant $\frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n}$ au lieu de $\frac{d^{m+n}_{x,y} u}{dx^m dy^n}$, parce que les exposants de dx et dy suffisent pour indiquer le nombre des différentiations effectuées par rapport à chacune des variables x et y.

Mais si, pour avoir la différentielle partielle correspondante, on faisait la multiplication par $dx^m dy^n$ en supprimant le dénominateur, on obtiendrait $d^{m+n} u$, expression

qui ne renfermerait plus aucune trace des différentiations effectuées. On est donc obligé, pour que la notation ait un sens déterminé, de conserver le dénominateur, et d'écrire ainsi cette différentielle,

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} dx^m dy^n.$$

Elle serait représentée beaucoup plus simplement par la notation déjà employée, $d_{x,y}^{m+n} u$.

Le système de notation de Lagrange s'applique aux fonctions de plusieurs variables; mais nous n'en parlerons pas, vu que les géomètres n'en font pas usage. La notation de Leibnitz a prévalu, parce qu'elle a surtout le grand avantage de mettre en évidence les différences infiniment petites, dont la considération est si utile dans toutes les recherches qui dépendent des Mathématiques.

Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes.

205. Soit

$$u = F(x, y),$$

x et y étant indépendants; nous avons vu précédemment que l'on avait

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δx, Δy, Δu, qu Δx et Δy tendent vers zéro.

La somme des deux premiers termes jouit donc, par port à l'accroissement total Δu, de cette propriété re quable, d'être égale à la différence elle-même, à une tité près infiniment petite par rapport à cette diffé D'après cela, l'analogie nous conduit à donner le r

différentielle totale de u à l'expression suivante :

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

dx et dy étant des quantités indéterminées et indépendantes que nous nommerons les différentielles de x et y. Elle jouit de la propriété que, lorsque dx et dy seront considérés comme les accroissements infiniment petits donnés à x et y, elle pourra être prise pour l'accroissement total de u, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet accroissement.

Nous désignerons cette différentielle totale par du, et il faudra bien la distinguer des du partiels qui se trouvent dans le second membre et sont différents l'un de l'autre. Pour éviter toute confusion, on devra se garder de supprimer les facteurs communs dx et dy, et écrire

$$(1) \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

On peut encore écrire

$$du = d_x u + d_y u.$$

Ces considérations s'appliquent à un nombre quelconque de variables indépendantes, et la *différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes sera toujours la somme de ses différentielles partielles relatives à chacune de ces variables.*

Cherchons maintenant l'expression des différentielles successives de u. Et pour cela remarquons d'abord que la différentielle de $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$ sera, par la règle qui vient d'être démontrée,

$$\frac{d^{n+p+1}u}{dx^{n+1}dy^p}dx + \frac{d^{n+p+1}u}{dx^n dy^{p+1}}dy;$$

elle se formerait donc en multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ l'expression proposée $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$, pourvu qu'on y considérât l'indice du numérateur comme un exposant, et qu'après la multiplication on changeât l'exposant des numérateurs en indices de différentiation. D'après cela, si l'on part de la formule (1), la différentielle du second membre s'obtiendra en le multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, et faisant le changement des exposants en indices. Il en sera de même pour la différentielle de ce résultat; et, par conséquent, en désignant par $d^m u$ la différentielle totale de l'ordre m de u, on aura la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m = (d_x u + d_y u)^m,$$

en entendant toujours que les exposants des du dans le second membre seront changés en indices de différentiation, ainsi que dans le troisième, où les notations x, y resteront invariables. On peut encore l'écrire ainsi :

$$d^m u = (d_x + d_y)^m u.$$

Comparons maintenant $d^m u$ à la différence totale $\Delta^m u$. Reprenons pour cela la formule

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

dans laquelle nous supposons Δx et Δy infiniment petits, et donnons à x et y les mêmes accroissements Δx, Δy. L'accroissement de $\frac{du}{dx}$ calculé semblablement s'obtiendrait en multipliant $\frac{du}{dx}$ par $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$, et ajoutant une quantité infiniment petite par rapport à Δx et Δy; il en serait

de même pour l'accroissement de $\frac{du}{dy}$. De sorte que l'accroissement de $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$ sera représenté symboliquement par le carré de cette expression, dans lequel on changera les exposants de du en indices, plus une quantité infiniment petite par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x\,\Delta y$, Δy^2. Or nous savons que ω se compose de termes qui ont en facteurs, les uns Δx, les autres Δy, et en outre d'autres facteurs qui deviennent nuls avec Δx et Δy ainsi que leurs dérivées; d'où il suit que l'accroissement de ω sera infiniment petit par rapport aux mêmes quantités Δx^2, $\Delta x\,\Delta y$, Δy^2. On a donc la formule symbolique

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^2 + \omega',$$

ω' étant infiniment petit par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x\Delta y$, Δy^2. En continuant ainsi, on parviendrait sans difficulté, quel que fût le nombre des variables, à la formule symbolique générale

$$\Delta^m u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^m + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport au produit de m facteurs Δx ou Δy.

On a donc aussi cette autre proposition générale :

La différentielle totale de l'ordre m d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes dans laquelle on prend dx, dy,... égaux aux accroissements infiniment petits de ces variables ne diffère de la différence $m^{ième}$ correspondante que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.

Remarque générale. — Lorsque l'on cherchera une équa-

tion entre les différentielles d'ordre quelconque de fonctions quelconques, et que, pour y parvenir, il sera avantageux de considérer d'abord des différences infiniment petites, on pourra substituer les différentielles aux différences correspondantes, et négliger toute quantité infiniment petite par rapport à celles entre lesquelles on cherche la relation; car si l'on divisait l'équation exacte par une des différences, élevée à une puissance convenable, et qu'on passât à la limite, les rapports des différences seraient remplacés par ceux des différentielles, et l'on aurait l'équation même à laquelle on serait parvenu en négligeant des quantités nécessaires pour l'exactitude de l'équation entre les différences, mais qui disparaissent de l'équation exacte entre les différentielles considérées comme des quantités infiniment petites ou finies.

CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIELLES TOTALES DES DIVERS ORDRES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES DÉPENDANTES.

206. Si les variables x et y, qui entrent dans la fonction u, étaient elles-mêmes des fonctions de variables indépendantes, les différentielles totales de u changeraient toutes de forme, excepté celle du premier ordre, parce que les facteurs dx, dy ne seraient plus constants.

Ainsi la différentielle première de u aurait toujours pour expression

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Mais, en différentiant cette expression, il s'introduirait les termes

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et l'on formerait d^2x, d^2y en fonction des variables indépendantes et de leurs différentielles, d'après les formules précédentes. On aura ainsi

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et d^2u jouira, par rapport à Δ^2u, de la propriété qui a été démontrée indépendamment de la forme qui pourrait résulter de variables intermédiaires entre u et les variables indépendantes.

On trouverait de même les différentielles totales des ordres suivants, et pour un nombre quelconque de variables supposées dépendantes d'autres quelconques. Si, parmi ces variables, les unes étaient dépendantes et les autres indépendantes, il suffirait de supposer nulles les différentielles de ces dernières, qui passeraient de premier ordre.

Cas particulier où x et y sont des fonctions linéaires.— Si x et y étaient des fonctions linéaires des variables indépendantes, dx et dy seraient constants, quelles que fussent les valeurs des variables; on aurait donc

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad d^3x = 0, \ldots,$$

et, par conséquent, on retrouverait la formule symbolique

$$d^m u + \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m = (d_x u + d_y u)^m,$$

qui s'étendrait à un nombre quelconque de variables.

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

207. Supposons d'abord la fonction implicite u dépendante des variables x et y, et déterminée par une équation unique

$$F(x, y, u) = 0;$$

nous aurons

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$

d'où l'on tirerait du, comme nous l'avons déjà vu.

Différentiant encore cette équation par rapport à toutes les variables, et observant que du n'est pas constant, il

vient

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}dx\,dy$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dx\,du}dx\,du + 2\frac{d^2F}{dy\,du}dy\,du + \frac{dF}{du}d^2u = 0;$$

d'où l'on tirerait d^2u, et ainsi de suite. On agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables indépendantes. Si u ne dépendait que d'une variable x, cette équation se réduirait à

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,du}dx\,du + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + \frac{dF}{du}d^2u = 0.$$

208. Si l'on avait deux équations, il y aurait deux variables, fonctions de toutes les autres; et dans ce cas on différentierait successivement chacune des équations, en distinguant bien les variables dépendantes des indépendantes : on déterminerait ainsi les différentielles secondes, troisièmes, etc., des deux fonctions; et l'on agirait de la même manière dans le cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soient, par exemple, les deux équations

$$F(x, y, u) = 0,$$
$$f(x, y, u) = 0;$$

y et u sont des fonctions de la variable indépendante x.

On aura d'abord les deux équations

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$
$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{du}du = 0,$$

d'où l'on tirera dy et du. En différentiant ces deux équa-

tions, on obtiendra

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}dx\,dy$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dx\,du}dx\,du + 2\frac{d^2F}{dy\,du}dy\,du + \frac{dF}{dy}d^2y + \frac{dF}{du}d^2u = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy$$
$$+ 2\frac{d^2f}{dx\,du}dx\,du + 2\frac{d^2f}{dy\,du}dy\,du + \frac{df}{dy}d^2y + \frac{df}{du}d^2u = 0,$$

d'où l'on tirerait d^2u et d^2y, puisque dy et du sont connus. On obtiendrait ainsi les différentielles de tous les ordres de y et u.

CHAPITRE VI.

CHANGEMENT DE VARIABLES.

209. *Cas d'une seule variable indépendante.* — Nous considérerons d'abord les fonctions d'une seule variable indépendante ; et l'objet que nous allons nous proposer est d'exprimer toutes les dérivées d'une fonction y par rapport à une variable x dont elle dépend, au moyen des dérivées successives d'une autre fonction u par rapport à une variable t, regardée comme indépendante.

Toutes les quantités dépendent d'une seule variable : ainsi l'on a trois équations entre x, y, u, t, ou deux seulement, en laissant de côté celle qui exprimera la relation entre x et y. On voit que, en vertu de ces trois équations, on peut considérer u comme une fonction de t, et ce sont les dérivées de u par rapport à t que l'on veut faire entrer dans des calculs où se trouvent les dérivées de y par rapport à x.

Pour cela nous allons d'abord exprimer les dérivées de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x et y par rapport à une même variable indépendante t dont elles seraient regardées comme fonctions. Ces formules seront les mêmes, quelle que soit la forme particulière, tant de l'équation entre x et y, que de celle qui doit lier en outre x et y avec t. Nous montrerons ensuite comment les dérivées de x et y par rapport à t peuvent s'exprimer au moyen de celles que l'on veut introduire, qui sont celles de u par rapport à t. Ce dernier calcul dépend des équations qui lient x et y avec t et u, et peut-être encore avec d'autres variables; et le nombre des équations doit toujours être tel,

qu'il n'y ait qu'une seule variable indépendante, comme nous l'avons supposé.

210. Pour exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de celles de x et y par rapport à t, nous observerons que, d'après le principe des fonctions de fonctions, on aura

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \quad \text{ou, puisque} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Passons maintenant à l'expression de $\frac{d^2x}{dx^2}$. Nous différentierons pour cela les deux membres de cette équation par rapport à x; mais, afin de n'introduire dans le second membre que des dérivées par rapport à t, nous le différentierons d'abord par rapport à t, puis nous multiplierons par $\frac{dt}{dx}$, ou nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

De même, pour obtenir $\frac{d^3y}{dx^3}$, nous différentierons le second membre par rapport à t, puis nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Et en continuant ainsi, il est clair que l'on aura l'expression de toutes les dérivées de y par rapport à x, au moyen de celles de x et y par rapport à une variable quelconque t, dont x et y seraient dépendants.

On peut, au lieu de dérivées de x et y par rapport à t,

introduire leurs différentielles; il suffira de supprimer le diviseur dt, et il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y\,dx-d^1x\,dy}{dx^3}.$$

Ces premières formules se rapportent au *changement de la variable indépendante* seulement.

Si l'on suppose que la variable t soit la fonction y elle-même, on aura les dérivées de y par rapport à x, exprimées au moyen de celles de x par rapport à y, quelle que soit d'ailleurs la relation entre x et y. Ces formules seront

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\ldots.$$

211. Considérons maintenant le cas général où l'on aurait, entre m variables $x, y, \ldots, u, t$, les $m-2$ équations

$$\begin{aligned} F(x, y, \ldots, u, t) &= 0,\\ f(x, y, \ldots, u, t) &= 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

sans compter l'équation qui donne y en fonction de x. Si l'on différentie ces $m-2$ équations par rapport à t, on pourra exprimer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{du}{dt}$ par la résolution d'équations du premier degré.

Différentiant de nouveau ces équations, on introduira les dérivées secondes par rapport à t, et il y restera des dérivées premières que l'on pourra remplacer par leurs valeurs, tirées des premières équations. On pourra donc encore, par la résolution d'équations du premier degré, tirer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ au moyen de $\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\frac{du}{dt}$.

En continuant ainsi, toutes les dérivées de x et de y par

rapport à t seront exprimées au moyen de celles de u par rapport à t; et comme nous avons donné les formules générales qui expriment $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ au moyen de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$, il s'ensuit que l'on connaîtra $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ au moyen de $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$ ce qui était l'objet de la question.

Si, au lieu d'équations finies, on avait des équations différentielles, il faudrait toujours chercher à en déduire $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ au moyen de $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$, et l'on agirait ensuite comme dans le cas précédent.

Supposons, par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1,$$

et proposons-nous d'exprimer $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ au moyen de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$. La question se réduit ici à exprimer $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ au moyen de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$.

Or on aura d'abord

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2}}.$$

Pour avoir $\frac{d^2y}{dt^2}$, on différentiera l'équation donnée, et il viendra

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2}}}.$$

Une nouvelle différentiation ferait connaître $\frac{d^3y}{dt^3}$, et ainsi de suite.

Ce cas est celui où l'on déterminera une courbe par une équation entre l'arc et l'abscisse.

212. *Cas de plusieurs variables indépendantes.* — Considérons maintenant une fonction z de deux variables indépendantes x, y. Sa forme n'est pas connue, et l'on ne doit pas avoir besoin d'en faire usage; mais on doit toujours raisonner dans l'hypothèse qu'elle existe.

La question que nous nous proposons est de déterminer les dérivées partielles de tous les ordres, de z par rapport à x et y, au moyen de celles d'une autre fonction r par rapport à deux autres variables indépendantes φ et θ, en supposant qu'il existe trois équations entre $x, y, z, r, \varphi, \theta$, savoir

$$(1)\quad \begin{cases} F(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \quad F_1(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \\ \qquad\qquad F_2(x, y, z, \theta, \varphi, r) = 0, \end{cases}$$

de sorte que quatre quelconques de ces six variables peuvent être regardées comme fonctions des deux autres, qui seront entièrement arbitraires.

Cela posé, différentions successivement r par rapport à chacune des variables x et y, la seconde étant supposée constante; et considérons r comme dépendant de θ et φ, qui eux-mêmes dépendent de x et y. Nous aurons ainsi

$$(2)\qquad \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Il faut maintenant éliminer de ces équations les dérivées $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{dr}{dy}$, et pour cela nous différentierons

d'abord les équations (1) par rapport à x; d'où

$$\frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dF_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF_1}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF_1}{dx}+\frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dF_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}+\frac{dF_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF_2}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF_2}{dx}+\frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx}=0;$$

d'où nous tirerons $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$; en fonction de $\frac{dz}{dx}$ et les reportant dans la première équation (2), nous en tirerons immédiatement $\frac{dz}{dx}$ en fonction de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$.

Différentiant de même les équations (1) par rapport à y et faisant usage de la seconde équation (2), on obtiendra $\frac{dz}{dy}$ au moyen de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$; ce qui était l'objet que l'on s'était proposé.

On conclurait facilement de là $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ au moyen de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par la résolution de deux équations du premier degré; mais on pourrait d'ailleurs les obtenir directement en suivant une marche inverse.

On passera aux dérivées partielles du second ordre en différentiant $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ par rapport à x et y, on sera ramené à différentier $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ par rapport à x et y : et on les traitera comme on a traité r, ce qui introduira les dérivées du second ordre de r par rapport à θ et φ.

On aura en outre à différentier $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, ce qui introduira des dérivées partielles du second ordre de z par rapport à x et y, dont on aura ainsi les valeurs.

Il est facile de voir que cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables indépendantes, et s'étend aux dérivées de toutes les autres.

213. Nous examinerons, en particulier, le cas d'une fonction u de trois variables indépendantes x, y, z, qui doivent être remplacées par trois autres variables indépendantes r, φ, θ, liées à x, y, z par trois équations connues; dans ce cas, il s'agira d'exprimer toujours les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z au moyen de ses dérivées partielles par rapport à r, φ, θ. Ce problème renferme celui de la transformation des coordonnées dans des équations aux différentielles partielles où la variable principale est une fonction de trois coordonnées.

Considérons u comme fonction de θ, φ, r, et ces dernières comme fonction de x, y, z; et différentions u partiellement par rapport à x, y, z, nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx},\\ \frac{du}{dy} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy},\\ \frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or, au moyen des trois équations entre x, y, z, θ, φ, r, on peut déterminer les dérivées partielles

$$\frac{d\theta}{dx},\quad \frac{d\theta}{dy},\quad \frac{d\theta}{dz},\quad \frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dy},\quad \frac{d\varphi}{dz},\quad \frac{dr}{dx},\quad \frac{dr}{dy},\quad \frac{dr}{dz},$$

et par conséquent les équations (3) donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction u par rapport à x, y, z, au moyen de celles de la même fonction par rapport à θ, φ, r.

La résolution de ces trois équations ferait connaître

$\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$, au moyen de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$; mais on pourrait les trouver directement par une marche inverse de la précédente.

En différentiant les équations (3) successivement par rapport à x, y, z, on exprimerait les dérivées du second ordre par rapport aux variables indépendantes d'un des systèmes, au moyen des dérivées du second ordre par rapport aux variables de l'autre; et l'on continuerait ainsi indéfiniment.

Ainsi, par exemple, en différentiant $\frac{du}{dx}$ par rapport à x, on serait ramené à former les dérivées partielles de $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ par rapport à x, et c'est ce que l'on ferait en traitant $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ comme on avait d'abord traité u, ce qui introduirait les dérivées du second ordre de u par rapport à θ, φ, r, tout le reste étant connu.

214. Appliquons ce procédé à une transformation qui se présente souvent dans les questions de Mécanique et de Physique mathématique.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point, et r, θ, ψ ses coordonnées polaires, de sorte qu'on ait entre ces six variables les trois équations

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi;$$

on trouvera, au moyen de la méthode que nous venons d'exposer,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\theta - \frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$= \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^3} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,d\theta}\left(\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r}\right)$$

$$+ \frac{d^2u}{d\psi\,d\theta}\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$- \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right) + \frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\right),$$

$$= \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}$$

$$+ \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta} + \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi}{r^2}$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r},$$

$$= \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}$$

$$+ \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\cos\psi}{r^2}$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sin\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},$$

$$\frac{u}{3} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r} - 2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$- 2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\tang\theta} + \frac{du}{dr}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{r}$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) + 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\tang\theta} + \frac{du}{dr}\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r}\right)$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) - 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\cos^2\theta + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$+ 2\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

215. *Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous les formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. — Lorsqu'une fonction est le quotient de deux autres fonctions de x, et qu'une valeur particulière de x rend ces deux dernières nulles ou infinies, la valeur de la première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et, dans ce cas, on peut se proposer de déterminer la valeur vers laquelle converge la fraction donnée, lorsque x tend vers cette valeur particulière : c'est cette valeur limite que l'on désigne souvent sous le nom de *vraie valeur* de la fraction qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Cherchons d'abord la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ lorsque x tend vers une valeur x_0 telle, que l'on ait

$$F(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0.$$

Soit h une quantité tendant vers zéro; on aura, d'après le n° 189,

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)};$$

donc

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

lorsque x tend vers x_0; et, par conséquent, si $F'(x_0)$ et

$f'(x_0)$ ne sont pas nuls ni infinis, la limite cherchée sera $\frac{F'(x_0)}{f'(x^0)}$.

Si l'on avait encore

$$F'(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0,$$

la limite de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ serait la même que celle de $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, et ainsi de suite.

Si donc toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n exclusivement deviennent nulles pour $x = x_0$, la limite cherchée sera celle de $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$; et si $F^n(x_0)$ et $f^n(x_0)$ ne sont ni nulles ni infinies, on aura pour valeur de cette limite

$$\frac{F^n(x_0)}{f^n(x_0)}.$$

Si l'une de ces dernières dérivées est encore nulle, la limite sera zéro si c'est $F^n(x_0)$ qui est nulle, et la fonction croîtra sans limite si c'est $f^n(x_0)$.

216. Supposons maintenant

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = \infty,$$

d'où

$$\frac{1}{F(x_0)} = 0, \quad \frac{1}{f(x_0)} = 0.$$

Remplaçant $\frac{F(x)}{f(x)}$ par l'expression identique $\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{F(x)}}$, et appliquant à cette dernière la transformation précédente, on aura

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)}}{\frac{1}{F(x_0+h)}} = \frac{\frac{f'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)^2}}{\frac{F'(x_0+\theta h)}{F(x_0+\theta h)^2}}$$
$$= \left[\frac{F(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)}\right]^2 \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}.$$

Nous considérerons d'abord le cas où $\frac{F(x)}{f(x)}$ tend vers une valeur finie A différente de zéro. L'équation précédente donne alors, en passant aux limites,

$$A = A^2 \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}, \quad \text{d'où} \quad A = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

ce qui donne la même règle que dans le cas où l'on a

$$F(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0.$$

Supposons maintenant que $\frac{F(x)}{f(x)}$ tende vers zéro. En y ajoutant une quantité constante M, on formera la fraction $\frac{F(x) + Mf(x)}{f(x)}$ dont la limite sera M; et, par conséquent, on rentre dans le cas précédent. Il faut donc prendre les dérivées des deux termes et y faire tendre x vers x_0; ce qui donne pour la limite $\frac{F'(x_0) + Mf'(x_0)}{f'(x_0)}$ ou $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)} + M$, et comme cette limite est M, on aura $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)} = 0$; donc, dans ce cas, on obtient encore la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ en cherchant celle de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Enfin, si $\frac{F(x)}{f(x)}$ croît indéfiniment, $\frac{f(x)}{F(x)}$ tendra vers zéro; il en sera donc de même de $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, comme nous venons de le démontrer. Donc $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ croît indéfiniment. Donc enfin, dans tous les cas, on trouve la même limite pour $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ que pour $\frac{F(x)}{f(x)}$.

La règle est donc la même pour les fractions qui se réduisent à $\frac{\infty}{\infty}$ que pour celles qui se réduisent à $\frac{0}{0}$.

On agirait de la même manière sur $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ si ses deux termes devenaient encore infinis pour $x = x_0$; mais si toutes les dérivées successives le devenaient, cette méthode ne serait plus applicable; et ce qu'il y a souvent de mieux à faire dans ce cas, c'est de remplacer x par $x_0 + h$ et d'effectuer les réductions.

Ainsi soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\sqrt[3]{x - x_0}}{\sqrt[4]{x^2 - x_0^2}};$$

ses deux termes deviennent nuls pour $x = x_0$, et toutes les dérivées deviennent infinies; mais si l'on pose $x = x_0 + h$, elle devient

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h(2x_0 + h)}} \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2x_0 + h)^{\frac{1}{4}}};$$

supprimant le facteur commun $h^{\frac{1}{4}}$, il reste $\frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2x_0 + h)^{\frac{1}{4}}}$, dont la limite est zéro quand h tend vers zéro.

217. La valeur x_0, étant arbitraire, peut être supposée aussi grande que l'on voudra, et, par conséquent, les règles précédentes s'appliquent au cas où l'on a $x_0 = \infty$; mais la démonstration directe ne pourrait plus se faire de la même manière dans ce cas, et il est bon de l'examiner à part.

Si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)};$$

y tendant vers zéro, il n'y aura aucune difficulté, et l'on aura, par la démonstration précédente,

$$\lim \frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} - \lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} = \lim \frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

On aura donc aussi

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

x croissant indéfiniment.

218. Considérons maintenant le produit

$$F(x)f(x),$$

et supposons

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = 0;$$

nous aurons identiquement

$$F(x)f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}},$$

ce qui ramène au premier cas; et l'on trouve alors

$$\lim F(x)f(x) = -\lim \frac{F(x)^2 f'(x)}{F'(x)}.$$

Si la seconde expression rentre dans un des cas examinés, on la traitera par les procédés déjà indiqués.

219. On peut encore donner une autre règle pour trouver la limite de la fraction

$$\frac{F(x)}{x},$$

dans laquelle on suppose x infini.

En effet, h étant une quantité finie quelconque, on a, quel que soit x,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x+\theta h);$$

faisant croître x indéfiniment, le second membre tend vers $F'(\infty)$, qui est la limite de la fraction $\frac{F(x)}{x}$, d'après une des règles précédentes. Donc

$$\lim\frac{F(x)}{x}=\lim\frac{F(x+h)-F(x)}{h};$$

et si, pour plus de simplicité, on fait $h=1$,

$$\lim\frac{F(x)}{x}=\lim[F(x+1)-F(x)].$$

Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique*.

220. Considérons maintenant une expression de la forme

$$F(x)^{f(x)};$$

son logarithme est

$$f(x)\log F(x),$$

et rentre dans une expression que nous avons examinée. Si donc on peut déterminer par les règles précédentes la vraie valeur de ce logarithme, dans le cas singulier où les fonctions $\log F(x)$ et $f(x)$ seraient, la première infinie et l'autre nulle, on en conclura immédiatement celle de l'expression proposée.

Examinons en particulier l'expression

$$F(x)^{\frac{1}{x}}$$

dans le cas de $x = \infty$, et supposant $F(\infty) = \infty$. Le logarithme de cette expression est

$$\frac{\log F(x)}{x},$$

et sa limite est celle de $\frac{F'(x)}{F(x)}$, que l'on peut traiter par les règles précédentes.

Mais si l'on applique à $\frac{\log F(x)}{x}$ la règle particulière du n° 219, on trouvera que sa limite est la même que celle de

$$\log F(x+1) - \log F(x), \quad \text{ou} \quad \log \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Donc la limite de $F(x)^{\frac{1}{x}}$ est la même que celle de $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ quand x devient infini. Cette règle avait encore été démontrée par M. Cauchy.

Si l'on a $F(\infty) = 0$, on posera

$$F(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{d'où} \quad F(x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\varphi(x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Mais $\varphi(\infty) = \infty$; donc

$$\lim \varphi(x)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)},$$

et

$$\lim F(x)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \lim \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

221. L'application de ces diverses règles conduit à quelques résultats particuliers qui méritent d'être re-

marqués :

$$\frac{a^x}{x} = \infty \quad \text{pour} \quad x = \infty \quad \text{si l'on a} \quad a > 1,$$

$$\frac{\log x}{x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

$$x \log x = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$x e^{\frac{1}{x}} = \infty \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

$$(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{pour} \quad x = \infty,$$

$$x^x = 1 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

$$(\cos mx)^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS.

222. *Série de Taylor.* — La série que nous allons faire connaître a pour objet de développer l'accroissement d'une fonction suivant les puissances entières et positives de l'accroissement correspondant de la variable dont elle dépend. Ce sera une généralisation de la formule donnée au n° 71.

Désignons par x et $x+h$, ou par x et X les deux valeurs quelconques de x que l'on considère, par F la fonction; il s'agit de développer $F(x+h)-F(x)$, ou $F(X)-F(x)$, suivant les puissances de la différence h ou $X-x$. Nous donnerons à cet effet deux formules qui différeront par la forme du reste qui complète la série, et pourront être utiles dans des cas différents.

Première formule.— Commençons par écrire un nombre quelconque n de termes déduits suivant la même loi que si la fonction était entière et rationnelle; et désignons par $f(h)$ la fonction de x et de h, qui, ajoutée à ces termes, reproduit $F(x+h)$: nous aurons, sans aucune exception, si les fonctions $F, F', \ldots, F^{n-1}$ sont continues,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x) + f(h), \end{aligned}\right.$$

et la fonction à déterminer est $f(h)$. Les dérivées des deux membres par rapport à h, en laissant x constant, étant né-

cessairement identiques, on reconnaît sans peine que $f(h)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées deviennent nulles pour $h=0$, et que

$$f^{(n)}(h) = F^{(n)}(x+h).$$

Donc, d'après une formule démontrée précédemment, on aura

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h),$$

et, par suite,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h). \end{aligned}\right.$$

Cette formule donne la solution de la question, et montre dans quel cas elle est possible. En effet, si l'expression

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$$

tend vers zéro à mesure que n augmente, $F(x+h)$ est la limite de la série

$$F(x) + hF'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \ldots,$$

et l'on peut poser la formule suivante, qui est celle de Taylor :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h) = F(x) + hF_1(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Mais il faut bien faire attention que, d'après la formule sur laquelle est fondée cette série, elle ne peut être substituée à $F(x+h)$ que lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées

sont continues entre x et $x+h$, et que $\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

La fonction $F(x+h)$ ne peut être développée suivant les puissances de h autrement que par la formule (3); car deux séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une même variable, et dont les sommes sont égales, quelle que soit la valeur de cette variable, sont les mêmes, terme pour terme.

223. Il est facile de reconnaître que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h),$$

qui donne la valeur exacte du reste de la série, après les n premiers termes, tend vers zéro toutes les fois que $F^n(x)$ reste fini, lorsque n augmente indéfiniment; et pour cela il suffit de faire voir que $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ tend vers zéro quel que soit h. En effet, quand n aura dépassé la valeur de h, et qu'on l'augmentera indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ sera multipliée par les fractions $\frac{h}{n+1}$, $\frac{h}{n+2}$,..., qui diminuent de plus en plus. Mais quand même elles resteraient égales à la première, qui est plus petite que l'unité, on sait que le produit aurait pour limite zéro. Donc il en est de même de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ quand n croîtra indéfiniment; et la série de Taylor peut être employée lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues et finies entre x et $x+h$.

Limites de l'erreur. — La formule (2) a l'avantage de donner des limites de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série de Taylor. En effet, si l'on

prend les n premiers termes, la quantité exacte qu'il faudrait y ajouter pour obtenir $F(x+h)$ est

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h).$$

Si donc on désigne par A et B la plus petite et la plus grande valeur que prend $F^n(x)$ quand x passe par toutes les valeurs, de x à $x+h$, l'erreur commise en prenant les n premiers termes de la série sera plus grande que $\frac{Ah^n}{1.2\ldots n}$ et plus petite que $\frac{Bh^n}{1.2\ldots n}$.

224. La formule

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$$

n'exige aucune condition relative aux dérivées d'un ordre supérieur au $n^{ième}$. Ces dernières pourraient être discontinues dans l'intervalle de x à $x+h$, sans que la formule cessât d'être exacte. Ainsi ce développement peut être exact quand on l'arrête à un certain terme, et devenir inexact si on voulait le pousser au delà.

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$F(x) = f(x) + (x-x_0)^{m+\frac{p}{q}} \varphi(x),$$

m étant un nombre entier positif, et $\frac{p}{q}$ compris entre 0 et 1. Si l'on considère pour x la valeur particulière x_n, les dérivées seront finies jusqu'à $F^m(x_0)$ inclusivement, en supposant que celles de $f(x)$ et $\varphi(x)$ le soient; mais au delà

elles deviendront infinies. Le développement ne devra donc être poussé que jusqu'au terme $\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m-1}F^{m-1}(x_0)$ tout au plus; et il pourra être complété au moyen d'un terme renfermant la dérivée suivante.

225. *Développement de* $F(x)$. — Si, dans la formule (2), on fait $x=0$, et qu'on remplace ensuite la lettre h par la lettre x, on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots \\ &\quad +\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(0)+\frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x). \end{aligned}\right.$$

On peut ainsi développer une fonction de x suivant les puissances de x, pourvu que cette fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues entre 0 et x. Si, à mesure que n augmente indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x)$ tend vers zéro, la fonction $F(x)$ pourra être exprimée par la formule

$$(5)\qquad F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{1.2}F''(0)+\ldots;$$

c'est-à-dire que la limite de la somme des termes du second membre est $F(x)$. Cette dernière formule est celle de Maclaurin.

Si on l'avait obtenue avant celle de Taylor, on en déduirait celle-ci en considérant $F(x+h)$ comme une fonction de h et la développant par la formule de Maclaurin.

Formule plus générale pour le développement de $F(x)$. — On peut encore développer $F(x)$ d'après la formule de Taylor, en remplaçant x par $x_0+(x-x_0)$; on trouve

ainsi, d'après l'équation (2),

$$(6)\quad \begin{cases} F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \dfrac{(x - x_0)^2}{1.2}F''(x_0) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n}F^n[x_0 + \theta(x - x_0)], \end{cases}$$

et l'on peut toujours choisir x_0, de telle sorte que $F(x_0)$, $F'(x_0)$,... ne soient pas infinies. Mais cela ne suffira pas, et il faudra toujours s'assurer que le reste de la série, dont nous connaissons l'expression, a pour limite zéro.

Autre formule. — Enfin la série de Taylor conduit à une autre forme de développement peu employée, due à Bernoulli. Si l'on suppose $h = -x$, elle devient

$$F(0) = F(x) - xF'(x) + \frac{x^2}{1.2}F''(x) - \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots,$$

d'où

$$(7)\quad F(x) = F(0) + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F''(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x)\ldots.$$

Les coefficients des différentes puissances de x sont eux-mêmes des fonctions de x; de sorte que l'on ne trouve pas dans ce développement le principal avantage que l'on cherche, qui est de remplacer la fonction par un polynôme entier et rationnel. On s'assurerait de son exactitude comme dans les formules précédentes.

226. Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor et de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes ; car elles pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles devraient représenter.

Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = 0$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle. Il suit de là que si $F(x)$

est une fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera, par conséquent, inexacte.

L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre quelconque de termes.

227. *Autre développement différant du premier par la forme du reste.*

Dans le n° **217**, nous avons déterminé le reste $f(h)$, qui complète exactement le développement de $F(x+h)$ dans l'équation (1), en différentiant les deux membres de cette équation par rapport à la dernière valeur $x+h$ ou X en laissant constante la première x. Nous allons maintenant chercher une autre expression de ce même reste en partant de la même équation (1), et différentiant ses deux membres par rapport à la première valeur x supposée variable, et considérant la dernière X ou $x+h$ comme constante. Dans ce cas, le second membre renfermerait deux variables x, h, liées par la condition $x+h=X$. Pour n'en laisser qu'une seule en évidence, nous remplacerons h par $X-x$, et l'équation (1) prendra la forme suivante, où $\varphi(x)$ représente le reste complémentaire qui dépend de la variable actuelle x et de quantités constantes,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} F(X) = F(x) &+ \frac{(X-x)}{1}F'(x) + \frac{(X-x)^2}{1.2}F''(x)\ldots \\ &+ \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x) + \varphi(x). \end{aligned}\right.$$

Différentiant une seule fois les deux membres par rapport à x en laissant X constante, on trouve, toute réduction

faite,

$$0 = \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x) + \varphi'(x).$$

Cette équation détermine la dérivée par rapport à x de la fonction inconnue $\varphi(x)$; sa valeur est

$$(9) \qquad \varphi'(x) = -\frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x),$$

d'où l'on peut déduire une expression de $\varphi(x)$, en appliquant la formule (6). En y supposant $n = 1$, et désignant par z une valeur quelconque, on en tirera

$$\varphi(x) = \varphi(z) + (x-z)\varphi'[z + \theta(x-z)];$$

prenant, pour simplifier, $z = X$, et observant que $\varphi(X) = 0$, on obtiendra

$$\varphi(x) = (x-X)\varphi'[X + \theta(x-X)],$$

et, remettant pour φ' l'expression (9), dans laquelle on remplacera la variable x par $X + \theta(x-X)$, il viendra

$$\varphi(x) = \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots(n-1)} \theta^{n-1} F^n[X + \theta(x-X)]$$
$$= \frac{h^n \theta^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x + h - \theta h),$$

et, posant $1 - \theta = \theta'$,

$$\varphi(x) = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x + \theta' h).$$

La formule (8) devient donc, en remplaçant X par $x + h$ et supprimant l'accent de θ',

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) \\ + \frac{h^n(1-\theta')^n}{1.2\ldots(n-1)} F^n(x + \theta h). \end{aligned} \right.$$

Cette formule ne diffère de (2) que par la forme du reste; elle pourra être utile dans les cas où l'autre serait insuffisante : nous en donnerons des exemples.

En y faisant $x = 0$, puis en remplaçant la variable h par x, l'équation (10) donne

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(\theta x). \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant donner quelques applications de ces formules.

228. Applications. — 1° Soit $F(x) = a^x$, on aura

$$F'(x) = a^x la\ldots,\quad F^n(x) = a^x l^n a,$$
$$F(0) = 1,\quad F'(0) = la\ldots,\quad F^n(0) = l^n a,$$

et, par suite,

$$a^x = 1 + x la + \frac{x^2 l^2 a}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1} l^{n-1} a}{1.2\ldots n-1} + \frac{x^n l^n a}{1.2.\ .n} a^{\theta x}.$$

Le reste $\frac{x^n l^n a}{1.2\ldots n} a^{\theta x}$ tendant vers zéro, à mesure que n augmente, la série indéfinie a pour somme a^x.

2° Soient

$$F(x) = l(1+x),\quad F'(x) = (1+x)^{-1},$$
$$F''(x) = -(1+x)^{-2},\quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

d'où il résulte

$$F(0) = 0,\ F'(0) = 1,\ F''(0) = -1, \ldots,\ F^n(0) = \pm 1.2\ldots(n-1),$$

et, par conséquent,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

La série serait composée de termes indéfiniment croissants

si l'on supposait $x > 1$, parce que la limite du rapport d'un terme au précédent est x, lorsque leurs exposants augmentent indéfiniment (*voir* à la fin la Note sur les séries). Il suffit donc de s'assurer si le reste tend vers zéro quand on a $x < 1$; et pour cela il faut distinguer deux cas. Si x est positif, on a $\frac{x}{1+\theta x} < 1$ si $x < 1$; et par conséquent le reste tend vers zéro, et la série converge vers $l(1+x)$.

Si x est négatif et qu'on le représente par $-z$, le reste $\frac{z^n}{n(1-\theta z)^n}$ ne se présente pas sous une forme propre à faire reconnaître s'il tend vers zéro, parce que l'on n'aperçoit pas lequel est le plus grand des deux termes de la fraction $\frac{z}{1-\theta z}$. Mais si l'on prend la seconde forme que nous avons indiquée pour le reste, on trouvera pour le cas actuel $\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$, ou, abstraction faite du signe,

$$\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}\frac{z}{1-\theta z}.$$

Or la fraction $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est moindre que l'unité si $z < 1$; donc le reste tend vers zéro, et la série représente $l(1+x)$. Cette série peut donc être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

On peut obtenir des séries plus convergentes que la précédente et plus applicables au calcul des logarithmes.

Si dans la formule

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \ldots$$

on change x en $-x$, on obtient

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \ldots,$$

et, en retranchant la seconde de la première,

$$\mathrm{l}\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Posant

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{y},\quad \text{d'où}\quad x=\frac{1}{2y+1},$$

il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{l}\left(\frac{y+1}{y}\right)&=\mathrm{l}(y+1)-\mathrm{l}y\\&=2\left[\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3(2y+1)^3}+\frac{1}{5(2y+1)^5}+\ldots\right].\end{aligned}$$

Cette série très-convergente donne la différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, et fait connaître, par conséquent, les logarithmes de tous les nombres entiers depuis l'unité.

Connaissant les logarithmes dans la base e, on les obtiendrait dans toute autre base, en les divisant par le logarithme de la nouvelle base pris dans la base e.

Nous ferons connaître plus tard des procédés plus commodes pour la construction des Tables de logarithmes.

3° Soit maintenant

$$F(x)=(1+x)^m,$$

on aura

$$F'(x)=m(1+x)^{m-1},\ldots,$$
$$F^n(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2\ldots\\+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.\end{aligned}$$

Pour que la série indéfinie représente $(1+x)^m$, il est d'a-

bord nécessaire qu'elle soit convergente. Or le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}x$, et tend vers $-x$ à mesure que p augmente; donc la série n'est pas convergente si x est en dehors des limites $+1$ et -1. Il suffit donc de reconnaître si le reste tend vers zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites.

Ce reste peut se décomposer dans les deux facteurs

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n \quad \text{et} \quad (1+\theta x)^{m-n}.$$

Le premier tend vers zéro, parce que, si n augmente d'une unité, il se trouve multiplié par $\frac{m-n}{n+1}x$, qui s'approche de plus en plus de $-x$ dont la valeur absolue est moindre que l'unité; et quant au second facteur $\frac{(1+\theta x)^m}{(1+\theta x)^n}$, si l'on suppose d'abord x positif, il tend aussi vers zéro, à moins que θ ne s'approche indéfiniment de zéro; mais, dans tous les cas, ce facteur reste plus petit que l'unité, et, par conséquent, le reste de la série tend vers zéro. Donc elle représente $(1+x)^n$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

Mais si x est négatif, rien ne prouve que le second facteur ne croîtra pas indéfiniment avec n, et cela arrivera même certainement, à moins que θ ne tende vers zéro; car l'expression $(1+\theta x)^n$ tendrait vers zéro si la fraction $1+\theta x$ ne s'approchait pas indéfiniment de l'unité. Il faut alors avoir recours à la seconde forme du reste, qui est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Le facteur $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{1.2\ldots n-1}$ tend encore vers

zéro; l'autre facteur, en remplaçant x par $-z$,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Or on a $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$, puisque $z<1$: donc $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ tendra vers zéro, à moins que θ ne tende vers zéro; et dans ce cas même cette expression est toujours moindre que l'unité. Donc le reste de la série tend vers zéro, et, par conséquent, celle-ci peut être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

4° En prenant successivement

$$F(x)=\sin x,\quad F(x)=\cos x,$$

on est conduit aux séries suivantes qui sont exactes, quel que soit x,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots.$$

Elles supposent le rayon égal à l'unité, c'est-à-dire que x désigne le rapport de l'arc au rayon du cercle; et $\sin x$, $\cos x$ désignent les rapports des lignes auxquelles elles correspondent, à ce même rayon : dans le cas où il serait désigné par R, on remplacerait dans les seconds membres x par $\frac{x}{R}$, R étant le rayon; et dans les premiers $\sin x$ et $\cos x$ par $\frac{\sin x}{R}$, $\frac{\cos x}{R}$. Quelque grand que soit x, les termes finissent par aller constamment en diminuant, et comme ils sont alternativement positifs ou négatifs, l'erreur commise en arrêtant la série à un terme quelconque est moindre que le suivant.

5° Considérons maintenant des fonctions de $x+h$, et

soit d'abord $F(x) = x^m$; on trouvera, quel que soit m,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots m-n+2}{1.2\ldots(n-1)}x^{m-n+1}h^{m-}$$
$$+ \frac{m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}h^n(x+\theta h)^{m-n}.$$

Le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}\frac{h}{x}$, et tend vers $-\frac{h}{x}$ quand p augmente indéfiniment; la série ne sera donc convergente que si l'on a $h < x$, abstraction faite des signes. Quant au reste, on reconnaîtra, comme dans le cas de $(1+x)^m$, que si h est compris entre $+x$ et $-x$, il tend vers zéro; et la série représente par conséquent $(x+h)^m$.

6° Soit encore

$$F(x) = \log x,$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\log e}{x}, \ldots, \quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(u-1)\frac{\log e}{x^n};$$

on trouvera

$$\log(x+h) = \log x + \log e\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots \pm \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}\right].$$

La convergence de la série exige encore $h < x$; dans ce cas, on reconnaîtra, comme dans le cas de $\log(1+x)$, que le reste tend vers zéro, à mesure que n augmente, et que, par conséquent, $\log(x+h)$ peut se développer par la formule de Taylor, lorsque h est compris entre $+x$ et $-x$.

On déduirait le développement de $\log(x+h)$ de celui de $\log(1+x)$, en observant que

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

et de même on aurait déduit le développement de $(x+h)^m$

de celui de $(1+x)^m$, en observant que

$$(x+h)^m = x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m.$$

On développerait aussi a^{x+h}, en remarquant que

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et il resterait à développer a^h par la formule donnée ci-dessus.

229. *Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.* — Proposons-nous maintenant de développer $F(x+k, y+k)$ suivant les puissances de h et k, $F(x, y)$ étant une fonction donnée. Pour cela nous considérerons d'abord la fonction $F(x+ht, y+kt)$, et nous la développerons suivant les puissances de t par la formule de Maclaurin : il suffira ensuite de faire $t=1$ pour avoir le développement cherché. Or, pour avoir les coefficients des différentes puissances de t, il faut prendre les dérivées successives de $F(x+ht, y+kt)$ par rapport à t, puis y faire $t=0$. On trouvera par la règle des fonctions composées de fonctions linéaires, en entendant que, dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$, on remplace x et y par $x+ht$, $y+kt$,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k,$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2F}{dy\,dx}hk + \frac{d^2F}{dy^2}k^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^nF}{dt^n} = \frac{d^nF}{dx^n}h^n + n\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \dots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n.$$

Si l'on fait $t=0$ dans toutes ces dérivées partielles, elles deviennent celles de la fonction même $F(x, y)$. On aura donc

$$F(x+ht, y+kt) = F(x, y) + \left(\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right)t + \dots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\dots n}\left(\frac{d^nF}{dx^n}h^n + \dots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n\right)_{x+\theta ht,\, y+\theta kt},$$

x et y étant remplacés par $x+\theta ht$ et $y+\theta kt$ dans le coëfficient de t^n. Faisant maintenant $t=1$, on aura le développement cherché

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x+h,y+k) = F(x,y) &+ \frac{dF}{dx}h + \frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots \\ &+ \frac{dF}{dy}k + \frac{d^2F}{dxdy}hk + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} \\ &\qquad + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{m-3}dy^2}\frac{h^{n-3}}{1\ldots(n-3)}\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad + \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots \end{aligned}\right\} + \left\{\begin{aligned} &\frac{d^nF}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} \\ &+\ldots \\ &+\frac{d^nF}{dy^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} \end{aligned}\right\}_{\substack{x+\theta k\\ y+\theta h}}$$

ou, en employant la notation des différentielles totales, et représentant h, k par dx, dy et $F(x, y)$ par F,

$$F(x+dx, y+dy) = F + \frac{dF}{1} + \frac{d^2F}{1.2} \ldots + \frac{d^{n-1}F}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d^nF(x+\theta dx, y+\theta dy)}{1.2\ldots n},$$

pourvu que toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient continues entre $x+h$ et $y+k$.

On aurait une formule analogue si, au lieu de $F(x,y)$, on avait une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Pour que cette série, poussée indéfiniment, représente $F(x+h, y+k)$, il faut que l'ensemble des termes qui expriment le reste tende vers zéro; et l'on pourrait s'en assurer en prenant la valeur de θ qui rendrait ce reste le plus grand possible, et cherchant si cette valeur maximum tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Quand il arrivera que chaque terme du reste tende vers zéro, quelque valeur qu'ait θ entre 0 et 1, il sera prouvé que le reste lui-même diminue indéfiniment; et la fonction $F(x+h, y+k)$ sera développable en série suivant les puissances entières et positives de h et k.

Si dans la formule précédente on fait $x=0$, $y=0$, on a le développement de $F(h,k)$; et si l'on change h et k en x et y, on obtient

$$F(x,y)=F(0,0)+\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$
$$+\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y+\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)_0 xy+\ldots$$
$$\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0\frac{y^2}{1.2}+\ldots$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^nF}{dx^n}\dfrac{y^n}{1.2\ldots n}\\ +\ldots\\ \\ +\dfrac{d^nF}{dy^n}\dfrac{y^n}{1.2\ldots n}\end{array}\right\}_{\theta x,\theta y}.$$

Dans toutes les dérivées partielles de $F(x,y)$ on doit remplacer x et y par 0, excepté dans les termes du reste, où ils doivent être remplacés par θx, θy. Si ce reste tend vers zéro quand n augmente, $E(x,y)$ peut se développer en série indéfinie suivant les puissances de x et y. On a ainsi la formule de Maclaurin étendue aux fonctions de deux variables; et on l'étendra semblablement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Les deux formules (1) et (2) peuvent être écrites comme il suit, α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tendant vers zéro avec h et k :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(x+h, y+k) = F(x, y) &+ \frac{dF}{dx}h + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\,\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left(\frac{d^nF}{dx^n} + \alpha\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n} \\
&+ \frac{dF}{dy}k + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\,\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\,\frac{k}{1} + \left(\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy} + \alpha_1\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{k}{1} \\
&+ \qquad\qquad\qquad\qquad + \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&+ \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\,\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \left(\frac{d^nF}{dy^n} + \alpha_n\right)\frac{k^n}{1.2\ldots n};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(x, y) = F(0, 0) &+ \left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\right)_0 \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_0 + \alpha\right\}\frac{x^n}{1\ldots n} \\
&+ \left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y + \ldots + \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad + \left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)_0 \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \left\{\left(\frac{d^nF}{dy^n}\right)_0 + \alpha_n\right\}\frac{y_n}{1.2\ldots n}.
\end{aligned}
\right.
$$

CHAPITRE IX.

DES MAXIMA ET MINIMA DES FONCTIONS.

230. On dit qu'une fonction $F(x)$ prend une valeur maximum pour la valeur x_0 de x, lorsque, x croissant ou décroissant à partir de x_0 dans un intervalle déterminé, quelque petit qu'il soit, la fonction $F(x)$ est toujours moindre que $F(x_0)$. La valeur de la fonction est minimum lorsque, dans les mêmes circonstances, $F(x)$ est toujours plus grand que $F(x_0)$.

Il résulte de là que, pour que x_0 donne un maximum ou un minimum pour $F(x)$, il est nécessaire et suffisant que $F(x_0+h)-F(x_0)$ soit constamment négatif ou constamment positif, quel que soit le signe de h, pourvu que sa valeur soit suffisamment petite. Il n'y a de règles générales, pour s'en assurer, que quand $F'(x)$ est continu dans le voisinage de x_0, et c'est le seul cas que nous examinerons.

On aura alors

$$F(x_0+h)-F(x_0)=hF'(x_0+\theta h).$$

Lorsque h tend vers zéro, $F'(x_0+\theta h)$ tend vers $F'(x_0)$; et si cette dernière valeur n'était pas nulle, le second membre changerait de signe avec h : la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ ne serait donc pas de signe constant, quel que fût le signe de h, et par conséquent $F(x)$ ne serait ni maximum ni minimum, pour $x=x_0$. Une condition commune au maximum et au minimum est donc $F'(x_0)=0$, et c'est seulement parmi les racines réelles de l'équation $F'(x)=0$ qu'il

faut chercher les valeurs de x propres à rendre $F(x)$ maximum ou minimum. La valeur x_0 étant ainsi choisie, on aura

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^2}{1.2} F''(x_0 + \theta h).$$

La limite de $F''(x_0 + \theta h)$ est $F''(x_0)$ lorsque h tend vers zéro, et si $F''(x_0)$ n'est pas nul, il est évident que pour toutes les valeurs de h positives ou négatives, comprises dans des limites suffisamment petites, le second membre et, par suite, la différence $F(x_0 + h) - F(x_0)$ conservent toujours le même signe. La valeur $F(x_0)$ est donc maximum ou minimum. Elle est maximum lorsque l'on a $F''(x_0) < 0$, et minimum si $F''(x_0) > 0$. Mais si par hasard on a $F''(x_0) = 0$, on ne peut plus rien conclure, et il faut mettre la différence sous une autre forme. On pourra écrire dans ce cas

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x_0 + \theta h),$$

et comme h^3 change de signe avec h, on voit que, si $F'''(x_0)$ n'est pas nul, la différence changerait de signe avec h; il n'y aurait donc ni maximum ni minimum.

Mais si $F'''(x_0) = 0$, on a

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^4}{1.2.3.4} F^{\text{IV}}(x_0 + \theta h),$$

et il est clair que si l'on a $F^{\text{IV}}(x_0) < 0$, la différence est constamment négative, et $F(x_0)$ sera maximum; tandis que si l'on a $F^{\text{IV}}(x_0) > 0$, elle sera constamment positive, et $F(x_0)$ sera minimum.

Les mêmes raisonnements étant continués jusqu'à ce que l'on obtienne une dérivée qui ne devienne pas nulle pour $x = x_0$, on arrive à cette conclusion générale que, *pour que x_0 rende maximum ou minimum une fonction dont*

les dérivées sont continues, il faut que cette valeur de x annule un nombre impair de dérivées consécutives, à partir de la première; et lorsque cette condition est remplie, on a un maximum si la dérivée suivante est rendue négative par cette valeur de x, et un minimum si elle est positive.

La recherche des maxima et minima est ainsi ramenée à la détermination des dérivées d'une fonction d'une seule variable et des racines réelles d'une équation à une inconnue.

Si cette fonction n'est pas donnée d'une manière explicite, on formera ses dérivées par les règles connues, puis on appliquera la théorie qui vient d'être exposée, et qui est indépendante des moyens à employer pour former ces dérivées. Nous allons montrer quelle est, dans ce cas, la marche du calcul.

231. *Cas des fonctions implicites.* — Considérons une fonction liée à $m-1$ variables par $m-1$ équations données; soient, pour fixer les idées, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

u étant la fonction de x dont il faut trouver le maximum ou le minimum.

En les différentiant, on trouve

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = 0, \\ &\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx} = 0, \\ &\frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF_2}{du}\frac{du}{dx} = 0; \end{aligned} \right.$$

au moyen de ces équations, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et la va-

leur de $\frac{du}{dx}$ qu'on en tirera devra ensuite être égalée à zéro; ou, plus simplement, on remplacera $\frac{du}{dx}$ par zéro dans ces équations, puis on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ entre les équations résultantes, qui sont

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on obtiendra une équation qui, jointe aux trois autres $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, déterminera x, y, z, u.

On différentiera de nouveau les équations (1), et l'on obtiendra la valeur de $\frac{d^2u}{dx^2}$; on y substituera les valeurs trouvées de x, y, z, u, et l'on reconnaîtra aux signes de cette expression s'il y a maximum ou minimum. Si l'on avait $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, on chercherait les dérivées suivantes de u par rapport à x, et l'on y appliquerait la théorie précédente.

232. Pour éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ des équations (2), on peut se servir de la *méthode des multiplicateurs*. Pour cela on multipliera les deux dernières par des facteurs indéterminés λ, μ, et on les ajoutera à la première; puis on égalera à zéro les coefficients $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et le terme indépendant : ce qui con-

duit aux trois équations

$$\frac{dF}{dx} + \lambda \frac{dF_1}{dx} + \mu \frac{dF_2}{dx} = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \lambda \frac{dF_1}{dy} + \mu \frac{dF_2}{dy} = 0,$$
$$\frac{dF}{dz} + \lambda \frac{dF_1}{dz} + \mu \frac{dF_2}{dz} = 0,$$

d'où l'on éliminera λ et μ; ce qui conduira, comme on le sait par les théories de l'Algèbre, à la même équation que si l'on avait éliminé autrement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Ce procédé de calcul a souvent des avantages sur l'autre.

233. Considérons maintenant une fonction de m variables, liées par $m - 1$ équations : ce cas renferme le précédent, qui s'en déduit en supposant que la fonction se réduise à l'une des variables. Soient, par exemple, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

et soit proposé de trouver le maximum de la fonction $f(x, y, z, u)$. Dans ce cas, aux équations (1), dans lesquelles $\frac{du}{dx}$ ne serait plus zéro, on joindrait la suivante :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 0,$$

et de ces quatre équations on éliminerait $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$. Il en résulterait une équation entre x, y, z, u, qui, jointe aux équations données, déterminerait ces quatre quantités. On chercherait ensuite la dérivée seconde de $f(x, y, z, u)$ par rapport à x; elle renfermerait $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, qui seront fa-

ciles à trouver au moyen des trois équations (1); et l'on reconnaîtrait, au signe de cette seconde dérivée, si la fonction $f(x, y, z, u)$ est minimum ou maximum.

On peut remarquer que les équations entre lesquelles on a à éliminer $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$ seraient les mêmes si l'on avait à chercher le maximum de l'une des fonctions F, F_1, F_2, les deux autres étant égales à zéro, ainsi que f.

Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

234. On dit qu'une fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes x, y acquiert une valeur maximum, pour certaines valeurs, x_0, y_0, de x et y, lorsque, en changeant ces variables en $x_0 + h$, $y_0 + k$, h et k étant des quantités arbitraires comprises entre zéro et des limites positives ou négatives aussi petites que l'on voudra, la fonction est constamment moindre que pour les valeurs x_0, y_0. Si, au contraire, elle était constamment plus grande, on dirait qu'elle est minimum pour ces mêmes valeurs.

D'après cela, la différence

$$F(x + h, y + k) - F(x, y)$$

doit être constamment négative, quels que soient les valeurs et les signes des quantités infiniment petites h et k, si $F(x, y)$ est maximum; et elle doit être constamment positive dans le cas du minimum. De sorte que ce sera un caractère commun au maximum et au minimum qu'elle soit invariable de signe.

Nous ne considérerons que le cas où la fonction et ses dérivées, jusqu'à l'ordre dont on aura besoin, sont continues Les cas de discontinuité ne donnent pas lieu à des règles générales et se discuteront suivant la question.

D'après une formule précédente, nous aurons, en désignant par α, α_1 des quantités infiniment petites,

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{dF}{dx} + \alpha\right) h + \left(\frac{dF}{dy} + \alpha_1\right) k.$$

Si $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dx}$ sont différents de zéro, le signe du second membre, lorsque h et k tendront vers zéro, finira par être constamment le même que celui de

$$\frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k.$$

Or cette expression change de signe si l'on change h et k de signes sans changer leur grandeur; donc $F(x, y)$ ne serait ni maximum ni minimum, et par conséquent, pour qu'elle puisse être l'un ou l'autre, il est indispensable que l'expression précédente soit nulle; comme h et k sont indépendants l'un de l'autre, on devra avoir

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, on aura

$$\begin{aligned} &F(x+h, y+k) - F(x, y) \\ &\quad = \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \alpha\right) \frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^2F}{dx\,dy} + \alpha_1\right) hk + \left(\frac{d^2F}{dy^2} + \alpha_2\right) \frac{k^2}{1.2}, \end{aligned}$$

et si les trois dérivées du second ordre ne sont pas toutes rendues nulles par les valeurs x, y, le signe du second membre, et par suite de l'accroissement, finira par être le même que celui du trinôme.

$$\frac{d^2F}{dx^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^2F}{dx\,dy} hk + \frac{d^2F}{dy^2} \frac{k^2}{2}.$$

Il faut que cette expression soit constamment négative,

quels que soient h et k, pour que $F(x, y)$ soit maximum, et constamment positive pour qu'elle soit minimum. Si on la divise par $\frac{h^2}{2}$, ce qui n'en change pas le signe, on obtient

$$\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\left(\frac{k}{h}\right) + \frac{d^2F}{dx^2};$$

et pour que ce trinôme ne change pas de signe, quel que soit $\frac{h}{k}$, et ne soit jamais nul, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right) < \frac{d^2F}{dy^2}\,\frac{d^2F}{dx^2},$$

condition qui entraîne que $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ soient de même signe.

Si elle est satisfaite par les valeurs de x et y tirées des deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

la fonction $F(x, y)$ sera maximum si $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ sont négatifs, et minimum s'ils sont positifs.

Si les trois dérivées du second ordre étaient nulles, il faudrait que toutes celles du troisième le fussent, et que le signe d'un polynôme du quatrième degré par rapport à $\frac{k}{h}$ fût constant : ce qui conduirait à des conditions plus compliquées. On continuerait semblablement si les dérivées du quatrième ordre étaient encore toutes nulles.

235. Ces raisonnements s'étendent facilement à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes; seulement les conditions se compliquent de plus en plus. Dans le cas de trois variables par exemple, on aura les

trois équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra que le polynôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dx\,dy}hk + 2\frac{d^2F}{dx\,dz}hl + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}kl$$

soit constamment de même signe, quels que soient h, k, l. Pour exprimer cette condition, on divisera d'abord par h^2; et si l'on pose $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$, on aura un polynôme de la forme

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

En le considérant relativement à la variable q seulement, il faudra, pour qu'il ne change pas de signe, que l'on ait, quel que soit p,

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

On posera sans difficulté la condition pour que ce polynôme soit de même signe quel que soit p, et l'on y ajoutera, pour qu'il soit négatif,

$$C^2 - AB < 0.$$

De même que le cas de deux indéterminées p, q se ramène à une seule, on ramènerait celui de trois à deux, et ainsi de suite.

236. *Cas d'une fonction implicite.* — Proposons-nous de trouver le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ en supposant les variables x, y, z liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en vertu de laquelle z est une fonction implicite des deux variables indépendantes x, y.

La théorie précédente exige que les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à x et y soient nulles séparément; ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

équations dans lesquelles on mettra pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées des deux suivantes :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

On aurait ainsi deux équations entre x, y, z, qui, jointes à $F(x, y, z) = 0$, détermineront x, y, z. On formera ensuite les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y, z)$; elles dépendront de celles de z, qui seront déterminées par les règles de la différentiation des fonctions implicites à deux variables.

En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction, et le nombre des équations qui les lient, il suffira de reconnaître les variables indépendantes, et d'égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à ces variables. Les équations qui en résulteront, jointes aux équations données, seront toujours en même nombre que les variables et les détermineront. On formera ensuite facilement les dérivées partielles successives de la fonction par rapport aux variables indépendantes, et on les soumettra aux épreuves établies dans la théorie précédente.

On peut donner une autre forme au calcul du maximum ou du minimum d'une fonction de $m + n$ variables, liées par n équations, ce qui est le cas le plus général.

Il y a alors m variables indépendantes, et l'on devra égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à chacune d'elles; ce qui revient à dire qu'on égalera à zéro la différentielle totale de cette fonction, quelles que soient les valeurs des différentielles indépendantes. Et, pour cela, on tirera des équations données les valeurs des différentielles des variables dépendantes en fonction de celles des variables indépendantes; on les substituera dans la différentielle totale de la fonction proposée, puis on égalera à zéro les coefficients de toutes les différentielles qui y sont restées.

Soit f la fonction de $m+n$ variables $x, y, z, u, \ldots$, qui sont liées par les n équations

$$\mathrm{L}=0, \quad \mathrm{M}=0, \quad \mathrm{N}=0, \ldots,$$

on aura $n+1$ équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\ldots=0,\\
&\frac{d\mathrm{L}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{L}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{L}}{dz}dz+\ldots=0,\\
&\frac{d\mathrm{M}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{M}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{M}}{dz}dz+\ldots=0,\\
&\frac{d\mathrm{N}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{N}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{N}}{dz}dz+\ldots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'on doit tirer des n dernières les valeurs des différentielles des n variables dépendantes, les reporter dans la première, et égaler à zéro les coefficients de m différentielles arbitraires qui y resteront. En d'autres termes, il faut éliminer n différentielles de ces $n+1$ équations, égaler à zéro les coefficients de celles qui subsisteront dans l'équation finale.

Pour faire cette élimination, on multipliera les n dernières équations par des facteurs indéterminés, λ, μ, ν,..., on les ajoutera à la première, et l'on égalera à zéro les coefficients des n différentielles des variables dépendantes, ce qui déterminera λ, μ, ν,..., puis on égalera à zéro les coefficients des m autres variables; ce qui revient évidemment à annuler les coefficients de $m+n$ différentielles, après l'addition des équations, et à éliminer λ, μ, ν,... de ses $m+n$ équations; ce qui conduira à m équations entre x, y, z,..., qui, jointes aux n équations données, déterminent les valeurs de ces variables qui peuvent donner les maxima et les minima de la fonction proposée. On les distinguera ensuite au moyen des secondes dérivées partielles de la fonction, comme nous l'avons fait connaître ci-dessus.

On peut remarquer que le calcul serait le même si l'on s'était proposé de trouver le maximum ou le minimum absolu de $f+\lambda L+\mu M+\ldots$, en ayant égard ensuite aux équations $L=0$, $M=0$.

237. Remarque. — Quelquefois les variables qui entrent dans l'expression dont on cherche le maximum ou le minimum, au lieu d'être liées par les équations, sont assujetties à des inégalités. On ne peut en tenir compte de la même manière que des équations, et l'on agit suivant le cas.

Quelquefois un changement de variables dispense de tenir compte des inégalités; nous en citerons un exemple.

Supposons qu'on demande le maximum ou le minimum de la distance d'un point donné B (*fig.* 84), aux différents points d'un cercle dont le centre est A et le rayon R, et que l'on exprime la distance BM au moyen de l'abscisse MP du point M du cercle; on aura, en faisant $AB=a$,

$$BM^2=a^2+R^2-2ax.$$

Si l'on ne remarquait pas que x est assujetti à la condition d'être compris entre $-R$ et $+R$, et qu'on appliquât la règle ordinaire, on écrirait $2a = 0$; ce qui ferait penser que le problème est impossible. Une discussion bien simple montre que, en faisant passer x de $-R$ à $+R$, le maximum a lieu pour $x = -R$ et le minimum pour $x = +R$; mais dans d'autres cas ce pourrait être très-difficile.

Si l'on posait $x = R\cos\varphi$, φ serait l'angle MAB, et il n'y aurait plus aucune condition d'inégalité à exprimer. On aurait alors

$$BM^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi,$$

et la règle ordinaire donnerait $\sin\varphi = 0$, d'où l'on tirerait $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, qui donnent le minimum et le maximum de BM.

CHAPITRE X.

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL A LA THÉORIE DES TANGENTES.

Tangentes et normales aux courbes planes. Expression générale de la longueur de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et de la sous-normale.

238. Plusieurs des questions que nous allons considérer n'auront pour objet que l'application des notations du Calcul différentiel à des questions étudiées dans le premier Livre, ou l'extension et la généralisation de ces mêmes questions. Nous commencerons par les tangentes et les normales.

Nous avons appelé, en général, *tangente à une courbe* la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.

Soient $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque, et x', y' les coordonnées du point de cette courbe, auquel on veut mener une tangente; l'équation de la sécante menée par ce point et par celui dont les coordonnées sont $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta y'$, et qui appartient aussi à la courbe, sera, dans un système quelconque d'axes,

$$y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}(x - x').$$

A mesure que le second point d'intersection se rapproche

du premier, $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ tend vers la dérivée de y par rapport à x, correspondant à la valeur particulière x'; il existe donc une direction limite pour la sécante, comme nous l'avons déjà établi; et, d'après les notations convenues, l'équation de cette droite que nous appelons *tangente* est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Le coefficient $\frac{dy'}{dx'}$ sera déterminé en fonction de x', y', d'après les règles du Calcul différentiel, au moyen de l'équation $F(x, y) = 0$, qui donne $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}}$.

L'équation de la tangente devient ainsi

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente, menée par le point de contact. Si les axes sont rectangulaires, son équation sera

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \quad \text{ou} \quad y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x'),$$

ou encore

$$(y - y')\frac{dF}{dx'} - (x - x')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Si les axes des coordonnées font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de la normale aura la forme suivante :

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dx'} - \frac{dF}{dy'}\cos\theta\right) - (x - x')\left(\frac{dF}{dy'} - \frac{dF}{dx'}\cos\theta\right) = 0.$$

Si les coordonnées x', y' n'étaient pas données et que la

tangente, ou la normale, fût assujettie à passer par un point donné, ou bien à être parallèle à une droite donnée, on obtiendrait immédiatement, d'après les équations précédentes, une équation entre x', y', qui, jointe à celle de la courbe, déterminerait ces deux inconnues. Si, au lieu de chercher les solutions réelles de ces deux équations, on construisait les lieux géométriques qu'elles représentent, en y regardant x', y' comme variables, les points d'intersection de ces lieux, dont l'un est la courbe proposée, seraient les points de contact cherchés.

239. On appelle *sous-tangente* et *sous-normale* les parties de l'axe des x comprises respectivement entre le pied de l'ordonnée du point de contact et les points où cet axe est rencontré par la tangente et la normale. Elles ont pour expression la valeur $x - x'$ relative à $y = 0$ dans les équations respectives de la tangente et de la normale. Elles seront dirigées vers les x positifs ou négatifs, à partir du pied de l'ordonnée, suivant que $x - x'$ sera positif ou négatif.

Nous appellerons *longueur de la tangente et de la normale* les parties de ces lignes comprises entre le point de contact et les points où elles coupent respectivement l'axe des x.

Il est facile d'obtenir l'expression de ces différentes lignes. Nous supposerons, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires, et nous représenterons par T la tangente, par N la normale, par S_t la sous-tangente, et par S_n la sous-normale. Cela posé, on trouvera facilement les formules suivantes :

$$S_t = -\frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{y'\,dx'}{dy'}, \quad S_n = y'\frac{dy'}{dx'},$$

$$T = y'\sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}, \qquad N = y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

EXEMPLES.

Ellipse et hyperbole. — Si l'on applique toutes ces formules à l'ellipse et à l'hyperbole, renfermées dans l'équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

on trouvera les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{l} a^2y'(y-y') \pm b^2x'(x-x') = 0 \\ \text{ou} \\ \quad a^2yy' \pm b^2xx' = \pm a^2b^2 \end{array}\right\}, \text{ équation de la tangente,}$$

$$b^2x'(y-y') \mp a^2y'(x-x') = 0; \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \qquad S_n = \mp \frac{b^2x'}{a^2};$$

$$T = \frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}, \quad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}.$$

Parabole. — Si l'on considère la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} (y-y')y' - p(x-x') = 0 \\ \text{ou} \\ yy' = p(x+x') \end{array}\right\}, \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'), \text{ équation de la normale,}$$

$$S_t = 2x', \qquad S_n = p,$$

$$T = \sqrt{2x'(2x'+p)}, \quad N = \sqrt{p(2x'+p)}.$$

Logarithmique. — Considérons maintenant la logarithmique ayant pour équation $y = a\,\mathrm{l}\,\frac{x}{m}$; a et m sont des lignes données, et les logarithmes sont relatifs à la base de Neper, ce qui ne diminue en rien la généralité de l'équa-

tion. On aura, dans ce cas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x};$$

$$y - y' = \frac{a}{x'}(x - x'), \quad \text{équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{x'}{a}(x - x'), \quad \text{équation de la normale;}$$

$$S_t = -x' \mathrm{l}\frac{x'}{m}, \quad S_n = \frac{y'a}{x'} = \frac{a^2 \mathrm{l}\frac{x'}{m}}{x'}.$$

Si l'on prend la sous-tangente et la sous-normale sur l'axe des y au lieu de l'axe des x, elles auront pour expression la valeur de $y - y'$ relative à $x = 0$.

On trouvera ainsi

$$S_t = -a, \quad S_n = \frac{x'^2}{a}.$$

Cycloïde. — Considérons encore la *cycloïde,* qui jouit de plusieurs propriétés très-remarquables.

Elle est engendrée, comme nous l'avons vu, par un point de la circonférence d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite indéfinie à laquelle il est tangent. Elle se compose d'une infinité de branches superposables, ayant chacune pour base une partie de la droite, égale à la circonférence du cercle mobile.

Prenons la droite donnée pour axe des x, et l'origine en un quelconque des points où elle est rencontrée par la courbe. Soient B (*fig.* 85) le point de contact du cercle générateur avec l'axe des x, et l'arc MB égal à AB; le point M appartiendra à la cycloïde. Désignons par ω l'angle MOB qui pourra prendre toutes les valeurs depuis o jusqu'à $\pm\infty$; il est facile d'établir les équations suivantes, dans lesquelles

a désigne le rayon du cercle :

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega).$$

Ces équations ont lieu dans toute l'étendue de la courbe. L'équation entre xy sera

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2};$$

mais il faudra avoir soin de changer alternativement le signe du radical dans les deux moitiés de chacune des branches successives. Différentiant ces équations, on aura

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \quad dy = a \sin\omega\, d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}(x - x'), \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}(x - x'), \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = y'\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}, \quad S_n = \sqrt{2ay' - y'^2} = \text{BP},$$

$$T = y'\sqrt{\frac{2a}{2a-y'}}, \quad N = \sqrt{2ay'} = \text{MB}.$$

La valeur de S_n ou de N prouve que la ligne MB est la normale, et, par suite, que la tangente est MC.

Formules analogues en coordonnées polaires.

240. Soit l'équation $F(\theta, r) = 0$ entre les coordonnées polaires θ et r d'une courbe à laquelle on veut mener la tangente au point M (*fig.* 86). Nous avons déjà vu com-

ment on détermine l'angle μ que fait cette tangente avec le rayon vecteur OM; le triangle KMN donne

$$\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KN}} = \frac{\sin \mathrm{N}}{\sin \mathrm{KMN}},$$

d'où, en passant aux limites,

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$$

La sous-tangente et la sous-normale se rapportent à la perpendiculaire au rayon vecteur, menée par le pôle. On trouvera immédiatement les formules suivantes :

$$\mathrm{S}_t = r \operatorname{tang}\mu = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}, \qquad \mathrm{S}_n = \frac{dr}{d\theta},$$

$$\mathrm{T} = r\sqrt{1 + r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad \mathrm{N} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Exemples. — 1° Soit d'abord la spirale d'Archimède :

$$r = a\theta, \quad \operatorname{tang}\mu = \theta, \quad \mathrm{S}_n = a.$$

On voit que la sous-normale est constante et que la courbe, tangente à l'axe, au pôle, tend de plus en plus à être perpendiculaire au rayon vecteur.

Soit maintenant l'équation $r = \frac{a}{\theta}$ de la spirale hyperbolique

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}, \quad \operatorname{tang}\mu = -\theta, \quad \mathrm{S}_t = -a.$$

Ainsi, dans cette courbe, c'est la sous-tangente qui est constante.

2° Considérons encore la spirale logarithmique dont l'équation est

$$r = ae^{m\theta}, \quad \frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{1}{m}, \quad S_t = \frac{r}{m}, \quad S_n = mr,$$

$$T = r\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \quad N = r\sqrt{1+m^2}.$$

La valeur de tang μ montre que le rayon vecteur est toujours également incliné sur la tangente.

Les valeurs de S_t et S_n prouvent que les extrémités de la normale et de la tangente décrivent des spirales identiques avec la première, et semblablement situées par rapport à des axes différents passant par le même pôle.

Les mêmes formules s'appliquent très-simplement aux sections coniques.

θ étant compris entre zéro et $+1$; on a donc

$$x^{m-1}\,t\mathrm{F}'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^n f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

ou

$$t\mathrm{F}'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{m-n-1}}f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si $m=n+1$, $x=\infty$ donnera pour limite de t, c'est-à-dire pour la valeur de l,

$$l=-\frac{f(k)}{\mathrm{F}'(k)}.$$

Si $m>n+1$, on a

$$l=0.$$

Si $m<n+1$, t n'a pas de limite, et il n'y a pas d'asymptote pour cette valeur de k. Ainsi, en général, l'équation de l'asymptote sera $y=kx-\frac{f'(k)}{\mathrm{F}'(k)}$, $f(k)$ se rapportant aux termes de degré $m-1$, et devenant nulle si $n<m-1$: il n'y a pas d'asymptote si $n>m-1$.

Si $n<m-1$, l'équation de l'asymptote est de la forme $y-kx=0$.

Si, dans le cas de $n=m-1$, la valeur de k tirée de $\mathrm{F}(k)=0$ satisfaisait aux équations $\mathrm{F}'(k)=0$, $f(k)=0$, l'équation de l'asymptote deviendrait indéterminée, et l'on ne pourrait en tirer l'équation cherchée, parce que le terme en x^{m-2} devient du même ordre que les deux premiers, et ne peut plus être négligé.

Dans ce cas, l'équation qui détermine la limite de t se mettrait sous cette forme :

$$\frac{x^{m-2}t^2}{1.2}\mathrm{F}''\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^{m-2}tf'\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right)$$
$$+x^{m-2}\varphi\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

$x^{m-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ étant le troisième terme de l'équation proposée.

Divisant par x^{m-2} et passant à la limite, l sera déterminée par l'équation

$$l^2\frac{F''(k)}{2}+lf'(k)+\varphi(k)=0.$$

On agirait semblablement si ces trois nouvelles fonctions devenaient nulles, pour cette valeur particulière de k.

Si $n<m-1$, et $F'(k)=0$, on n'a plus nécessairement $l=0$.

243. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on connaîtra toutes les directions qui peuvent donner des asymptotes, en cherchant toutes les valeurs réelles de θ qui donnent à r une valeur infinie.

Soit α une de ces valeurs de θ, on cherchera la limite du produit $r\sin(\theta-\alpha)$ supposé constamment réel, qui est l'expression de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur la droite menée par le pôle sous l'angle α avec l'axe. Cette limite sera la distance de cette droite à l'asymptote, et le signe dont elle sera affectée fera connaître de quel côté elle se trouve. Si le produit $r\sin(\theta-\alpha)$ croît indéfiniment, il n'y a pas d'asymptote dans cette direction.

On trouvera le même résultat en cherchant la limite de $r(\theta-\alpha)$ ou celle de $r\sin(\theta-\alpha)$, puisque la limite de $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\theta-\alpha}$ est l'unité.

Soit, pour exemple, l'équation générale

$$F(\theta)r^m+f(\theta)r^{m-2}+A_2r^{m-2}+\ldots+A_m=0,$$

A_2, $A_3,\ldots$, A_m étant des fonctions quelconques de θ. L'équation $F(\theta)=0$ fera connaître toutes les directions possibles des asymptotes. Soit α une des racines réelles de

cette équation et $\theta = \alpha + \delta$; puisque $F(\alpha) = 0$, on aura $F(\alpha + \delta) = \delta F'(\alpha + \theta\delta)$, et l'équation de la courbe devient alors, en divisant par r^{m-1},

$$r\delta F'(\alpha + \theta\delta) + f(\alpha + \delta) + \ldots = 0.$$

Lorsque r devient infini, il ne reste plus que les deux premiers termes, et l'on trouve

$$\lim r(\theta - \alpha) = \lim r\delta = -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}.$$

Si l'on avait $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$, on agirait comme dans le cas précédent.

Exemples. — 1° Soit proposé de trouver les asymptotes de la courbe ayant pour équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$F(k) = ak^2 + bk + c,$$
$$f(k) = dk + e.$$

$k = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ce qui exclut l'ellipse.

L'équation de ces asymptotes devient

$$y = kx - \frac{dk + e}{2ak + b}.$$

Le dernier terme devient infini dans le cas de la parabole, et par conséquent l'hyperbole est la seule courbe du second degré qui ait des asymptotes.

2° Soit maintenant $y = ae^{mx}$, équation de la logarithmique, qui ne rentre pas dans la classe générale considérée ci-dessus, parce que e^{mx} n'est pas d'un degré fini par rapport à x.

On cherchera toujours la limite de $\frac{y}{x}$ et ensuite celle de $y - kx$.

On trouve immédiatement $k = 0$; ensuite la limite de y est zéro, et correspond aux x négatifs. L'asymptote est donc l'axe des x, et dans la direction seule des x négatifs.

3° Dans le cas de la courbe, appelée *folium de Descartes,* et dont l'équation est

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

on trouvera une asymptote ayant pour équation

$$y = -x - a.$$

4° L'équation $y^2 = \cos\frac{y}{x}$ conduit à $k = 0$, $l = \pm 1$. La courbe a donc pour asymptotes les deux droites

$$y = +1, \quad y = -1.$$

5° L'équation $y = a\frac{\sin x}{x}$ représente une courbe qui a l'axe des x pour asymptote, et qui a cela de remarquable, qu'elle passe alternativement d'un côté et de l'autre de son asymptote jusqu'à l'infini.

6° L'équation $y = a \sin\frac{b}{x}$ donnera encore $y = 0$ pour l'équation d'une asymptote.

Elle offre en outre une particularité remarquable : elle s'approche indéfiniment de l'axe des y dans la partie comprise entre $y = -a$, $y = +a$. C'est donc là un véritable asymptotisme, puisque la longueur de la courbe augmente sans limite, en se rapprochant indéfiniment d'une droite fixe.

Cette courbe ne diffère pas de celle qu'on obtiendrait en enveloppant sur un cylindre une hyperbole équilatère dont une asymptote serait parallèle au plan de la base, et proje-

tant la courbe résultante sur un certain plan passant par l'axe du cylindre.

7° Soit maintenant l'équation polaire d'une hyperbole, par rapport à l'un de ses foyers,

$$(a - c\cos\theta)r = b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \lim r\delta = b.$$

Les deux asymptotes se trouveront ainsi déterminées.

Soit encore la spirale hyperbolique

$$(\theta - \omega)r = a;$$

on trouvera

$$\alpha = \omega, \quad \lim r\delta = a.$$

Des asymptotes considérées comme limites des tangentes.

244. En partant de l'équation ci-dessus

$$(1) \qquad x^m \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

qui renferme non-seulement toutes les courbes algébriques, mais encore toutes celles dont les termes ont des degrés déterminés par rapport à x et y, on arrive à une propriété remarquable des asymptotes, qui consiste en ce qu'elles peuvent être considérées comme limites des tangentes à la branche de courbe à laquelle elles se rapportent.

Nous pouvons supposer à l'axe des y une direction arbitraire, et alors $\frac{y}{x}$ tendra vers une limite finie k qui sera racine de l'équation

$$\mathrm{F}(k) = 0.$$

Cela posé, soit $\varphi(x, y)$ le premier membre de l'équa-

tion (1), on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)},$$

$$\varphi'(x) = -\frac{y}{x^2}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right]$$
$$+ m x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right],$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{m x^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + n x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{x^{m-1} F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Or, si l'on fait croître x indéfiniment, $F\left(\frac{y}{x}\right)$ tendra vers zéro, et l'équation (2) donnera

$$(3) \qquad \lim \frac{y}{x} = \lim \frac{dy}{dx}.$$

Ainsi d'abord, lorsqu'une branche de courbe a une asymptote, sa direction est la limite de celles des tangentes à cette même branche.

Cherchons maintenant la limite du point où la tangente rencontre l'axe des y, et dont l'ordonnée est $y - x\frac{dy}{dx}$.

L'équation (2) donne

$$(4) \qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{m x F\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n}{x^{m-n-1}} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Supposons d'abord $n = m - 1$, ou $n < m - 1$, auquel

cas la branche de courbe aura une asymptote; on aura alors

$$(5)\qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1)f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Or cette expression peut être simplifiée au moyen de l'équation (1). En effet, en divisant cette dernière par x^{m-1} et supposant d'abord $n = m - 1$, on obtient, en faisant croître x indéfiniment,

$$\lim\left[x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

L'équation (5) donne ainsi

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

et, par suite,

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f(k)}{\mathrm{F}'(k)};$$

donc la tangente coupe l'axe des y en un point dont la limite coïncide avec celui où ce même axe est coupé par l'asymptote.

Si l'on avait $n < m - 1$, la fonction f n'existerait pas, et l'on trouverait

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

L'asymptote et la limite des tangentes passeraient alors par l'origine.

Supposons enfin $n > m - 1$, alors la branche de courbe infinie n'a pas d'asymptote. Faisons $n = m - 1 + \delta$; l'é-

quation (1), divisée par x^n, donnera

$$\lim\left[x^{1-\delta}\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)\right]=0;$$

et, en introduisant cette condition dans l'équation (4), on trouvera que $y-x\frac{dy}{dx}$ deviendra infini avec x, et, par conséquent, qu'il n'y a pas de limite pour le point de rencontre de la tangente avec l'axe des y.

On arrivera donc, dans tous les cas, au même résultat, soit en cherchant l'asymptote d'une branche infinie, soit en cherchant la limite des tangentes.

Mais il faut bien remarquer que nous entendons ici, par limite des tangentes, la droite qui, menée sous l'inclinaison limite, coupe l'un des axes, celui des y par exemple, au point limite où cet axe est coupé par la tangente variable. Ce ne serait pas déterminer une droite que de dire simplement qu'elle est la limite d'une droite mobile qui ne reste pas toujours parallèle à elle-même. En effet, cette droite est située de la même manière par rapport à des droites parallèles entre elles, quoiqu'elle les coupe en des points qui peuvent être fort éloignés les uns des autres; et si elle s'approche indéfiniment de l'une de ces parallèles, elle s'approche également des autres, à partir des points respectifs où elle les coupe.

La démonstration que nous venons de donner se déduit si simplement de la forme de l'équation (1), pour laquelle nous avions calculé l'équation générale des asymptotes, que nous avons cru ne pas devoir l'omettre. Mais précisément parce qu'elle est fondée sur cette forme, elle n'a pas toute la généralité qu'on pourrait désirer, et nous allons traiter la question, indépendamment de toute forme particulière d'équation.

245. *Une asymptote est, en général, la limite des tan-*

gentes. — Considérons une branche infinie de courbe quelconque ayant une asymptote AX (*fig.* 87); cette courbe n'étant pas donnée par une équation, il est nécessaire d'en connaître certaines conditions géométriques bien déterminées, sur lesquelles le raisonnement puisse se fonder. Nous admettrons, comme seule définition de cette courbe, qu'elle est telle que, depuis un certain point B jusqu'à l'infini, ses points aillent constamment en s'approchant de AX, et que l'inclinaison de sa tangente sur AX varie toujours dans le même sens. Il est d'abord évident que depuis le point B la courbe est convexe vers AX : car la tangente en un point quelconque rencontrera AX au delà de son point de contact, puisque les distances à AX vont en diminuant de ce côté; si donc la courbe était concave vers AX et, par suite, comprise entre AX et sa tangente, elle couperait AX, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, menons une droite fixe quelconque AY; prenons sur cette droite un point P plus rapproché de AX que ne l'est le point B, et menons la droite indéfinie PU parallèle à AX. Elle coupera nécessairement la courbe en un seul point M, qui sera d'autant plus éloigné de AY que AP sera plus petit.

Si maintenant on joint le point P successivement aux différents points de la courbe situés au delà de M, cette droite coupera nécessairement AX, et, par conséquent, rencontrera auparavant la courbe en un second point. Cette sécante, tournant continuellement autour de P, deviendra tangente dans une position unique PQ, et le point de contact N sera au delà de M. Or les tangentes aux points situés au delà de N couperont nécessairement PQ entre N et Q, et AX au delà de Q; elles couperont donc AY entre A et P, et, comme PA peut être supposé aussi petit que l'on voudra, il s'ensuit que les tangentes à la courbe couperont AY en des points qui iront constamment en s'approchant de A, et que

leur distance à ce point a pour limite zéro. Comme d'ailleurs l'angle qu'elles font avec AX a zéro pour limite, on peut énoncer la proposition suivante, qu'il faut entendre avec les restrictions indiquées ci-dessus :

Lorsqu'une branche infinie a une asymptote, les tangentes à cette branche coupent une droite fixe non parallèle à l'asymptote, en des points qui ont une limite à mesure que le point de contact s'éloigne indéfiniment; leur direction a de même une limite, et si l'on mène par le point limite une droite dans cette dernière direction, elle coïncidera avec l'asymptote.

246. Si les conditions géométriques que nous avons admises n'existaient pas, il serait possible que la branche de courbe eût une asymptote, et que les tangentes n'eussent pas de limite.

En effet, si l'inclinaison de la courbe ne variait pas toujours dans le même sens, les tangentes aux points situés au delà de N pourraient pas couper PQ entre P et Q, et, par suite, AY entre P et A; rien ne prouverait alors que leur point de rencontre avec AY aurait une limite, et il est même facile de trouver des cas où cela n'a pas lieu.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = \frac{a + \sin x}{x^m},$$

m étant positif et $a > 1$. La courbe est tout entière au-dessus de l'axe des x; de plus, elle s'en approche indéfiniment, et, par conséquent, cet axe en est une asymptote. Cherchons maintenant le point où la tangente coupe l'axe des y. Son ordonnée $y - x\frac{dy}{dx}$ a la même limite que $-x\frac{dy}{dx}$, puisque l'ordonnée y du point de contact tend vers zéro; mais

on a

$$x\frac{dy}{dx} = x^{1-m}\cos x - \frac{m(a+\sin x)}{x^m},$$

expression dont le dernier terme tend vers zéro. Il reste donc à trouver la limite de $x^{1-m}\cos x$. Or cette limite est zéro lorsque l'on a $m > 1$, et alors la tangente a une limite, qui se confond avec l'asymptote; mais si l'on a

$$m = 1, \quad \text{ou} \quad m < 1,$$

$x\frac{dy}{dx}$ sera indéterminé; il pourra avoir toutes les valeurs comprises entre deux limites finies dans le premier cas, et infinies dans le second : d'où l'on voit qu'*une branche de courbe peut avoir une asymptote, sans qu'il existe une limite pour ses tangentes.*

Il est bon de remarquer que la tangente, considérée à partir de son point de contact, tendrait indéfiniment vers l'axe des x, parce que y et $\frac{dy}{dx}$ tendent vers zéro; mais si on la prolonge jusqu'à l'axe des y, elle s'écarte de l'axe des x, de quantités finies, ou même croissant indéfiniment, comme nous venons de le démontrer. Or, dans ce cas, on dit qu'une droite n'a pas de limite, parce que c'est toujours à l'origine et aux axes fixes qu'on la rapporte.

247. *Toute limite des tangentes est asymptote.* — Cette réciproque de la proposition précédente peut être démontrée comme il suit :

Soit X'X (*fig.* 88) une droite vers laquelle convergent les tangentes à une branche de courbe infinie; et par là nous entendons que ces tangentes font avec X'X un angle qui tend vers zéro à mesure que les points de contact s'éloignent indéfiniment, et que, si par un point A pris sur X'X on mène un axe fixe AY, il est coupé par la tangente variable en un point dont la limite est A.

Considérons maintenant une tangente quelconque PQ : il est admis qu'à partir d'une certaine position du point de contact jusqu'à l'infini, le point P va en se rapprochant indéfiniment de A, et que l'angle AQP tend vers zéro, ces deux quantités conservant leurs signes, ou en changeant d'une manière quelconque. Or il est évident que si le point de contact M est toujours situé dans la partie PQ de la tangente, quel que soit l'angle des axes dans lequel elle se trouve, sa distance MT à X'X est moindre que PA, et, par conséquent, il s'approche indéfiniment de X'X, puisque la limite de PA est zéro par hypothèse. Donc, dans ce cas, la ligne X'X est une asymptote.

Ce cas est celui qui aura lieu, par exemple, lorsque, à partir d'une certaine position de la tangente, le point Q ira toujours en s'éloignant, et le point P en se rapprochant de A; car les intersections successives des tangentes se feront toujours dans l'angle YAX, et, par suite, les limites de ces points, ou les points mêmes de la courbe, y seront renfermés.

Il reste donc à considérer le cas où le point de contact serait en dehors de la partie PQ. Or nous allons démontrer que la tangente ne pourrait alors avoir pour limite X'X, à moins que les points de cette branche de courbe ne s'approchent indéfiniment de cette même ligne X'X, qui sera par conséquent encore une asymptote.

Concevons, en effet, une branche de courbe infinie dont l'ordonnée ne tende pas vers zéro, et dont la tangente fasse avec l'axe AX (*fig.* 89), un angle ayant zéro pour limite.

L'ordonnée pourra croître indéfiniment, ou rester limitée : dans ce dernier cas, elle pourra tendre vers une valeur déterminée; elle pourra même osciller entre des limites déterminées, de telle sorte que, quelque grand que soit x, la courbe reste, ou du moins revienne, à certains intervalles, au-dessus d'une parallèle située à une distance finie de AX.

Or nous allons démontrer que, dans ces différentes hypothèses, AX ne peut être la limite des tangentes.

En effet, supposons d'abord que l'ordonnée croisse indéfiniment, et menons à AX une parallèle CV, à une distance AC aussi grande que l'on voudra de AX; cette parallèle rencontrera nécessairement la courbe en un certain point M, et la distance CM pourra dépasser toute grandeur donnée. Si maintenant par le point C et un point M′ de la courbe, situé au-dessus de CV à une distance aussi petite qu'on voudra de M, on fait passer une ligne droite, on sait que, quelque petit que soit l'angle qu'elle fera avec AX, elle finira par rencontrer la courbe en un second point au delà de MM′, puisque l'angle de la tangente à la courbe avec AX tend vers zéro. Donc, en faisant tourner cette droite dans le même sens, elle finira par devenir tangente en un point situé au delà de M. Donc, en prenant des points assez éloignés sur la courbe, la tangente coupera AY en des points C situés à des distances aussi grandes qu'on voudra de A. Donc enfin les tangentes n'ont pas pour limite AX.

Supposons maintenant que l'ordonnée ne croisse pas indéfiniment, et que les points de la courbe restent constamment au-dessus d'une droite BU menée parallèlement à AX à une distance déterminée différente de zéro, ou bien passent au-dessus et au-dessous de BU à des intervalles quelconques. Considérons un point M de la courbe, situé au-dessus de BU à une distance de AY plus grande qu'une quantité donnée quelconque, et menons par ce point MD parallèle à AX (*fig.* 90). En raisonnant comme dans le cas précédent, nous démontrerions qu'il existe une tangente en un point situé sur la courbe, au delà de M, et rencontrant AY en D, et, par conséquent, au-dessus de B; d'où il suit que AX n'est pas la limite des tangentes.

Donc enfin AX ne serait pas la limite des tangentes si

les points de la courbe étaient situés en dehors de la partie de la tangente comprise entre les deux axes, et qu'en même temps leur distance à AX ne tendît pas vers zéro; mais si cette distance tend vers zéro, AX est asymptote. D'où il résulte enfin que, quelque part que soit situé le point de contact sur la tangente variable, si cette droite tend vers une limite, dans le sens précédemment défini, *cette limite est une asymptote.*

CHAPITRE XII.

DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DE L'ARC DE L'AIRE ET DE L'INCLINAISON D'UNE COURBE PLANE. CONCAVITÉ. CONVEXITÉ. POINTS SINGULIERS.

248. Désignons par s la longueur de l'arc, prise à partir d'un certain point de la courbe : nous avons vu que son accroissement infiniment petit Δs ne pouvait différer que d'un infiniment petit du second ordre, de la partie de la tangente terminée à l'ordonnée extrême, c'est-à-dire de $\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$. Donc la limite de $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ est $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, et l'on a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Dans un système de coordonnées polaires, on aura

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}, \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

249. L'aire comprise entre deux ordonnées, l'axe de x et l'arc d'une courbe, croît d'une quantité comprise entre deux parallélogrammes dont la limite du rapport est l'unité, à mesure que Δx tend vers zéro : on peut donc, comme nous l'avons déjà dit, prendre l'un quelconque des deux au lieu de l'accroissement même de l'aire, sans altérer la limite du rapport à Δx. Si donc on désigne l'aire par A, on

aura

$$\frac{dA}{dx} = y \sin\theta, \quad \text{ou} \quad dA = y\,dx \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des axes.

Dans un système de coordonnées polaires, les deux parallélogrammes seront remplacés par des secteurs semblables, et l'on trouvera

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}, \quad \text{ou} \quad dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

250. L'inclinaison φ de la tangente sur l'axe de x est déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx};$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \cos^2\varphi \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$d\varphi = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1 + \dfrac{dy^2}{dx^2}}.$$

Cette valeur de $d\varphi$ est ce que nous nommons *angle de contingence;* il peut être pris pour $\Delta\varphi$, qui est celui des deux tangentes aux points dont les abscisses diffèrent de dx, sans que les limites des rapports soient altérées.

Dans un système de coordonnées polaires, l'angle de deux tangentes consécutives, ou la différence infiniment petite de l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe fixe, est égal à l'angle des deux rayons vecteurs correspondants, plus l'accroissement de l'inclinaison de la tangente sur le rayon vec-

teur correspondant. On trouvera ainsi

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}\, d\theta.$$

Concavité et convexité.

251. On dit qu'une courbe est concave en un de ses points par rapport à une droite donnée, lorsque, à partir de ce point, ses deux branches commencent par être comprises dans l'angle aigu formé par la droite donnée et la tangente à la courbe au point que l'on considère. Lorsque, au contraire, les deux branches commencent par être en dehors de cet angle, on dit que la courbe est convexe en ce point par rapport à la droite.

Nous allons faire connaître les caractères analytiques qui correspondent à ces deux circonstances, en supposant qu'on ait pris la droite donnée pour axe des x. Dans le cas de la concavité, l'ordonnée orthogonale de la courbe doit être moindre en grandeur absolue que celle de la tangente au point que l'on considère, pour les valeurs de x infiniment voisines de celle qui correspond à ce point. Ainsi l'ordonnée de la courbe sera plus petite que celle de la tangente lorsqu'elle sera positive, et plus grande lorsqu'elle sera négative. L'inverse aura lieu pour la convexité.

Or, en désignant par x', y' les coordonnées du point donné, et par h une quantité positive ou négative, qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, on a pour les points de la courbe

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}\, h + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h},$$

et pour la tangente au point (x', y'),

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'} h;$$

donc, si y' est positif, la courbe sera concave si le terme $\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'-\theta h}$ est négatif, et convexe s'il est positif. Or, si l'on n'a pas $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, le signe du terme en question sera le même que celui de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, quel que soit le signe de h. Les deux branches de la courbe commencent donc par être d'un même côté de la tangente; ce qui montre que notre définition des tangentes renferme celle des anciens, et l'étude des points singuliers nous fera voir qu'elle est plus générale. Supposant donc que $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ ne soit pas nul, on voit que, pour les points de la courbe qui sont du côté des y positifs, la condition de concavité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} < 0$, et la condition de convexité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} > 0$. C'est l'inverse pour les points situés du côté des y négatifs.

Si $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, il faudra que l'on ait $\frac{d^3y'}{dx'^3} = 0$ pour que les deux branches de la courbe soient d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point que l'on considère, et c'est au signe de $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ qu'on reconnaîtra la concavité ou la convexité. De même, si $\frac{d^4y'}{dx'^4} = 0$, il faudra qu'on ait $\frac{d^5y'}{dx^5} = 0$, et ainsi de suite.

252. *Points d'inflexion; points singuliers.* — Lorsque la concavité se change en convexité, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de

signe et, par conséquent, passer par zéro ou l'infini; les points où s'opère ce changement se nomment *points d'inflexion* et se déterminent en posant

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \infty.$$

Mais il ne suffit pas que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit nul pour qu'il y ait inflexion; car il faut, pour qu'il change de signe, que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit pas nul, ou que $\frac{d^4y}{dx^4}$ le soit en même temps, et ainsi de suite. Si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer s'il change de signe en passant par cette valeur.

Points multiples. — On appelle ainsi ceux où passent plusieurs branches de courbe et où l'on peut mener, par conséquent, plusieurs tangentes. On peut les déterminer par des règles très-simples pour toutes les courbes algébriques. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et rationnelle; on en tirera

$$(1) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Or, cette équation devant être satisfaite par plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tandis que $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ n'en auraient qu'une seule, on devra avoir $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, conjointement avec $F(x, y) = 0$. Si l'on trouve des solutions réelles communes à ces équations, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ seront données par l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (1), et remplaçant ensuite $\frac{dF}{dx}$ par zéro.

Si trois branches passaient au même point, les coefficients de cette équation seraient encore nuls, et l'on aurait recours à la troisième dérivée de l'équation; et ainsi de suite.

Les deux branches seraient tangentes si deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ étaient égales.

Si l'équation était résolue par rapport à y et renfermait des radicaux à double signe, on reconnaîtrait les points multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaître un de ces radicaux de y, sans le faire disparaître de $\frac{dy}{dx}$; car en ces points deux branches de courbe se couperont, et leurs tangentes seront différentes.

253. *Points de rebroussement.* — Si en un point multiple deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales, et que les deux branches s'arrêtent en ce point, on a un point de rebroussement. Il est du premier genre lorsque les deux branches sont de côtés différents de la tangente commune, et du second genre lorsqu'elles sont du même côté. On reconnaîtra que les branches s'arrêtent en ce point lorsque, en faisant varier x d'un côté seulement, leurs ordonnées deviendront imaginaires. Il faut cependant excepter le cas où $\frac{dy}{dx}$ serait infini en ce point; on considérerait alors l'abscisse au lieu de l'ordonnée.

Le rebroussement sera du premier genre lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera de signe différent pour les deux branches; il sera du second quand ce signe sera le même.

254. *Points conjugués.* — On appelle ainsi des points isolés dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'on en puisse supprimer ces solutions. Pour ces points, le Δy doit être imaginaire, et, par suite, le plus souvent le $\frac{dy}{dx}$. Dans ce cas, comme le $\frac{dy}{dx}$, tiré d'une équation du premier degré, ne saurait être imaginaire, les coordonnées des points conjugués satisferont aux équations $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$.

On les trouvera ainsi en même temps que les points multiples. Mais Δy peut être imaginaire sans que la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ le soit, parce que sa partie imaginaire pourrait avoir pour limite zéro.

255. *Points d'arrêt.* — On donne ce nom à tout point où s'arrête brusquement une branche unique de courbure.

On les déterminera en cherchant les valeurs de x à partir desquelles y commence à devenir imaginaire, s'il était réel auparavant, ou à devenir réel, s'il était imaginaire. Il faudra, de plus, s'assurer qu'il n'y a qu'une seule branche de la courbe à passer en ce point, et que, par conséquent, les valeurs voisines de x ne donnent pas plusieurs valeurs voisines pour y.

256. *Points saillants ou anguleux.* — On appelle ainsi les points où s'arrêtent deux branches de courbe, sans y avoir la même tangente. Ils rentrent dans la classe des points multiples. On les distinguera des points multiples ordinaires à ce que, comme dans le cas des points de rebroussement, les deux branches ne se prolongent pas au delà de leur point de rencontre.

Lorsque l'équation d'une courbe ne donne qu'une seule

valeur de y pour chaque valeur de x, toute valeur de x qui donnera deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ déterminera évidemment un point saillant.

Exemples de points singuliers.

1° $$a^2y^2 = a^2x^2 + x^4,$$

point multiple, inflexion.

2° $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tang} x$, $y = \frac{\operatorname{tang} x}{y}$, $y = x \operatorname{tang} x$

inflexions.

3° $$y = \varphi(x) + (x - a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x),$$

rebroussement du premier genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} < 2 \quad \text{et} \quad > 1;$$

rebroussement du second genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} > 2,$$

en supposant qu'on n'ait pas

$$\varphi''(x) = 0.$$

Cas particuliers de cette formule.

$$y^2 = x^3, \quad y = x \pm x\sqrt{x}, \quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x},$$

4° $$y = \frac{1}{\log x}, \quad y = x \log x,$$

point d'arrêt à l'origine;

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

point saillant ou anguleux à l'origine;

$$y = (x - a)\sqrt{x - b},$$

point conjugué, ayant pour abscisse a, si $a < b$; point multiple, ayant pour abscisse a, si $a > b$.

CHAPITRE XIII.

EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE DU RAYON DE COURBURE. COURBES OSCULATRICES EN GÉNÉRAL. CONTACT DE DIVERS ORDRES.

257. La courbure en un point d'une courbe, étant la limite du rapport de l'*angle des tangentes extrêmes* à l'arc correspondant, aura pour valeur

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{ds},$$

φ désignant l'angle de la tangente avec l'axe des x; et si l'on appelle R le rayon de courbure qui est aussi le rayon du cercle osculateur, nous avons vu que $\frac{1}{R}$ est la mesure de la courbure; on aura donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

et, d'après les formules des n°s 248, 250, on aura dans un système de coordonnées rectangles

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et dans un système de coordonnées polaires,

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

La réciproque de la valeur de R serait celle de la courbure.

Si l'on prenait pour variable indépendante une quantité quelconque t différente de l'abscisse, on déduirait l'équation suivante des formules générales par lesquelles on opère cette transformation

$$R = \frac{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \quad \text{ou} \quad R = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On aurait pu passer aussi à la valeur R exprimée en coordonnées polaires, en partant des coordonnées rectangulaires. On aurait trouvé la formule obtenue ci-dessus d'une manière directe.

Appliquons cette transformation au cas où la courbe serait donnée par une équation entre l'ordonnée et l'arc, et prenons l'arc pour variable indépendante; on a

$$R = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Il serait, du reste, très-facile de trouver directement cette dernière formule. On déterminerait l'angle de contingence $d\varphi$ en partant de la formule $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, d'où

$$\frac{d^2y}{ds^2}\,ds = \cos\varphi\,d\varphi = d\varphi\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}};$$

donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

formule qui coïncide avec celle que l'on avait obtenue par le changement de la variable indépendante.

Courbes osculatrices.

258. Si l'on considère, au lieu d'un cercle, une courbe représentée par une équation donnée de forme, et contenant un certain nombre de coefficients indéterminés, on pourra lui donner autant de points communs avec la courbe proposée qu'il y a de ces coefficients. Si l'on fait ensuite tendre tous ces points vers le premier, la limite vers laquelle tend la courbe variable se nomme la *courbe osculatrice* de la proposée, relativement à celles qui sont renfermées dans l'équation indéterminée.

Ces conditions géométriques peuvent être exprimées par des relations très-simples entre les coefficients différentiels successifs des ordonnées des deux courbes : soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ les abscisses de m points communs à deux courbes, croissant par degrés inégaux suivant une loi quelconque; on supposera, pour mettre le plus de généralité possible dans la question, que l'on prenne pour variable indépendante une quantité quelconque t, dont x, et par suite y, seront des fonctions connues.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ les valeurs de y relatives aux points communs; les différences successives de y_1 jusqu'à l'ordre $m-1$ peuvent s'exprimer, comme on le sait, au moyen des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et il est évident qu'elles seront les mêmes pour les deux courbes, puisque les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les mêmes. $\frac{\Delta y_1}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta t^2}, \ldots, \frac{\Delta^{m-1} y_1}{\Delta t^{m-1}}$ se-

ront donc identiquement les mêmes de part et d'autre, et, par suite, leurs limites seront aussi les mêmes.

Les $m-1$ premières dérivées de y par rapport à t auront donc les mêmes valeurs au point commun, dans les deux courbes, et il en sera de même de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}.$$

Or on sait, d'après les formules relatives au changement de la variable indépendante, que les valeurs de

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

ne dépendent que des dérivées de x et de y par rapport à t, depuis le premier ordre jusqu'à celui que l'on considère, inclusivement.

Donc, quelle que soit la loi continue suivant laquelle les points communs se rapprochent du premier, la courbe limite sera telle, que pour $x = x_1$ les quantités

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$$

auront la même valeur, si on les tire de son équation ou de l'équation de la courbe donnée.

Donc, pour déterminer les m coefficients de l'équation de la courbe osculatrice, il suffira d'égaler les valeurs des m quantités $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$, que l'on tirera des équations des deux courbes, et dans lesquelles on donnera à x et y les valeurs x_1, y_1 du point que l'on a choisi sur la première courbe.

Mais on formera plus simplement ces m équations en différentiant $m-1$ fois l'équation qu'il faut déterminer, et remplaçant dans celle-ci et dans ses $m-1$ dérivées x

et y par x_1, y_1, et les dérivées de y par celles qu'on tirera de l'équation connue.

Telle est la méthode générale au moyen de laquelle on trouve l'équation de la courbe osculatrice d'une espèce donnée.

Contacts de divers ordres.

259. Lorsque deux courbes ont un point commun, et que l'on augmente l'abscisse de ce point d'une quantité infiniment petite, la différence des ordonnées est généralement du premier ordre.

Si cette différence est du deuxième ordre, on dit que les courbes ont un contact du premier ordre; si elle est du troisième ordre, on dit que le contact est du second; et, en général, il y a un contact du $n^{ième}$ ordre entre deux courbes, lorsque la différence de leurs ordonnées, à partir du point commun, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$: d'où il suit que, entre deux courbes qui ont un contact d'un certain ordre, il est impossible qu'il en passe une autre dans le voisinage du point commun, si son contact avec l'une quelconque des deux est d'un ordre inférieur.

Pour qu'il n'y ait rien d'incertain dans cette définition des contacts de différents ordres, il est nécessaire de démontrer que l'ordre du contact est indépendant de la direction des axes; or c'est ce que l'on établit facilement en prouvant que, pour un point quelconque de l'une des courbes, les différences des ordonnées des deux courbes considérées relativement à des axes différents sont dans un rapport fini. Cette différence est la plus petite possible quand les ordonnées sont perpendiculaires à la tangente au point commun.

La seule direction qu'on doive excepter pour les ordonnées est celle de la tangente au point commun.

Les cordes menées dans cette direction sont d'un ordre

infinitésimal moindre d'une unité que pour tout autre. On reconnaît en effet immédiatement, en menant par un même point une sécante parallèle à la tangente commune et une autre dans une direction différente quelconque, que la partie interceptée par celle-ci a avec l'autre un rapport infiniment petit du premier ordre.

Maintenant, si l'on développe en séries les ordonnées des deux courbes suivant les puissances de l'accroissement de l'abscisse du point commun, on reconnaît immédiatement que le contact entre ces courbes sera de l'ordre n, si les n premières dérivées de l'ordonnée par rapport à l'abscisse sont respectivement égales pour chacune des courbes, quand on y substitue l'abscisse du point commun : car, dans ce cas, la différence des ordonnées, exprimée au moyen des deux termes qui complètent respectivement les deux séries, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

C'est là le caractère analytique auquel on reconnaît l'ordre du contact de deux lignes qui ont un point commun.

Autre manière d'envisager les courbes osculatrices.

260. Il résulte de ce qui vient d'être dit sur le contact des courbes que pour avoir la courbe d'une espèce donnée qui a le contact de l'ordre le plus élevé avec une courbe dont l'équation est connue il suffit de déterminer les coefficients arbitraires de l'équation générale des courbes dont l'espèce est donnée, en exprimant que, pour l'abscisse que l'on considère, les ordonnées sont respectivement égales, ainsi que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre le plus élevé possible. On établira ainsi autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. L'ordre du contact sera le nombre de ces équations, moins une.

On voit par là que la courbe *osculatrice* et la courbe qui a le contact de l'ordre le plus élevé sont identiques.

Pour la ligne droite, dont l'équation n'a que deux coefficients arbitraires, le contact ne sera, en général, que du premier ordre; il sera du deuxième pour le cercle. Mais il pourra arriver qu'en certains points particuliers le contact soit d'un ordre plus élevé.

Les coefficients de l'équation de la courbe osculatrice se détermineront, comme nous l'avons déjà dit, en formant ses équations différentielles successives et y substituant à y', $\frac{dy'}{dx'}$, ..., les valeurs tirées de l'équation de la courbe donnée. Les seules inconnues sont alors les coefficients; et s'ils entrent tous au premier degré, on trouvera un seul système de valeurs et, par conséquent, une seule courbe osculatrice.

Lorsque le nombre des dérivées communes est pair, la différence est d'un ordre impair, et, par conséquent, change de signe avec l'accroissement de x' : donc alors les courbes se coupent. C'est ce qui arrive, en général, pour le cercle osculateur.

Si, au contraire, le nombre des dérivées communes est impair, la différence est d'ordre pair et ne change pas de signe avec l'accroissement de x' : les lignes ne se coupent donc pas. C'est ce qui a lieu dans le cas de la ligne droite, excepté aux points d'inflexion.

261. Les courbes les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée sont celles qui sont renfermées dans l'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m.$$

On peut établir un contact de l'ordre $m - 1$ entre les deux courbes, et l'on aura immédiatement l'équation de la courbe osculatrice en développant son ordonnée par la formule de Taylor, après avoir remplacé x par $x' + (x - x')$. Cette

équation est la suivante, dans laquelle les dérivées de y' sont remplacées par celles que donne l'équation de la courbe connue,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x - x')^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^m y'}{dx'^m}\frac{(x - x')^m}{1.2.3\ldots m};$$

si $m = 1$, on a la droite osculatrice dont l'équation est

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

262. *Cercle osculateur.* — L'équation générale du cercle est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

α, β étant les coordonnées du centre, et R le rayon. D'après les théories précédentes, on déterminera les constantes α, β, R, relatives au cercle osculateur au point x', y' d'une courbe donnée, au moyen des trois équations

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \beta)^2 = R^2,$$

$$(x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0,$$

$\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ étant tirés de l'équation de la courbe donnée. La seconde de ces équations montre que le centre du cercle osculateur est situé sur la normale.

On tirera de là

$$y' - \beta = -\frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \quad x' - \alpha = \frac{dy'}{dx'}\frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, substituant dans la première,

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Cette équation donne pour le rayon la valeur déjà trouvée par une autre voie, et les deux précédentes font connaître les coordonnées α, β du centre de courbure, en fonction de x', y'.

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x', y', l'équation résultante entre α et β représentera le lieu des centres de courbure, ou la *développée* de la première.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE ANALYTIQUE DES DÉVELOPPÉES. COURBES ENVELOPPES.

263. Les équations qui déterminent les coordonnées α, β du centre de courbure, ou du point de la *développée*, correspondant au point (x', y') de la courbe donnée, sont, d'après le numéro précédent,

$$(1) \qquad (x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

Ces équations ayant lieu quel que soit le point que l'on considère, si l'on donne à x' un accroissement infiniment petit, y', α, β, qui sont des fonctions de x', en recevront de correspondants, et les équations (1) et (2) seront encore satisfaites; les accroissements de leurs premiers membres seront donc nuls, et, par suite, leurs dérivées par rapport à x'.

Or l'équation (1), différentiée en considérant α, β, y' comme fonctions de x', et ayant égard à l'équation (2), donne

$$-\frac{d\alpha}{dx'} - \frac{d\beta}{dx'}\frac{dy'}{dx'} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où il résulte, comme nous l'avions déjà démontré, que *la normale à la courbe donnée est tangente à sa développée, au centre de courbure.*

264. Le calcul peut encore conduire à la seconde propriété, qui consiste en ce que la différence de deux rayons de courbure d'une courbe est égale à l'arc correspondant de sa développée : il suffit, pour cela, de parvenir à une équation qui ne renferme que $d\mathrm{R}$, $d\alpha$, $d\beta$.

Or, si l'on différentie l'équation

$$(3) \qquad (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\mathrm{R}^2,$$

on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$-(x'-\alpha)\frac{d\alpha}{dx'}-(y'-\beta)\frac{d\beta}{dx'}=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dx'};$$

et si l'on remet pour $x'-\alpha$ sa valeur tirée de (1), il vient

$$(y'-\beta)\left(\frac{dy'}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d\beta}{dx'}\right)=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dx'},$$

et, remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$ par $\frac{d\alpha}{d\beta}$,

$$-(y'-\beta)\left(\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{d\beta\,dx'}\right)=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{dx'}.$$

Pour éliminer $y'-\beta$, on remarquera que les équations (1) et (3) donnent

$$\mathrm{R}=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}},$$

d'où

$$y'-\beta=\frac{\mathrm{R}\,d\beta}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}.$$

Reportant cette valeur de $y'-\beta$ dans l'équation ci-dessus, il vient, abstraction faite du signe du radical,

$$d\mathrm{R}=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2},$$

ce qui démontre que la différentielle du rayon de courbure est égale à celle de l'arc de la développée. D'où l'on conclut

qu'un arc quelconque de la développée est égal à la différence des rayons de courbure tangents à ses extrémités. La description de la première courbe d'un mouvement continu, par le développement de la seconde, en résulte, comme nous l'avions fait voir précédemment.

265. Si l'on donnait l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$ de la développée, et qu'on demandât celle de la développante, il faudrait éliminer α et β entre l'équation donnée et les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta}, \quad x - \alpha - (y - \beta)\frac{d\alpha}{d\beta} = 0,$$

dans lesquelles $\frac{d\alpha}{d\beta}$ serait donnée en fonction de α et β au moyen de l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$. Il en résulterait une équation entre $x, y, \frac{dy}{dx}$, et, au moyen du calcul intégral, on trouverait l'équation finie entre x et y.

Les coordonnées x, y d'un point quelconque de la développante peuvent facilement s'exprimer au moyen des coordonnées α, β et de l'arc s de la développée.

Une construction très-simple conduit immédiatement aux équations

$$\alpha - x = s\frac{d\alpha}{ds}, \quad \beta - y = s\frac{d\beta}{ds}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha - x}{\beta - y} = \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Si l'on en fait application au cas du cercle, dont l'équation est $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$, on trouve d'abord

$$\alpha x + \beta y = a^2, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{a}y = a,$$

équation qui donnerait immédiatement la projection de x et y sur le rayon a mené au point de contact. Mais

$$\frac{\alpha}{a} = \cos\frac{s}{a}, \quad \frac{\beta}{a} = \sin\frac{s}{a} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

L'équation de la développante du cercle sera donc

$$x \cos \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} + y \sin \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = a$$

et, en coordonnées polaires,

$$\theta = \frac{1}{a} \sqrt{r^2 - a^2} - \operatorname{arc\,cos} \frac{a}{r},$$

comme la figure le donnerait immédiatement.

Courbes enveloppes.

266. Nous avons vu (n° 154) que si l'on considère la courbe représentée par une équation $F(x, y, a) = 0$, qu'on cherche la limite des points de rencontre de cette courbe avec celles qui résulteraient d'un accroissement infiniment petit donné à a, et que l'on cherche le lieu de ces points limites sur toutes les courbes représentées par l'équation proposée, dans laquelle a varierait d'une manière continue, il suffit, pour obtenir ce lieu, d'*éliminer la constante a entre l'équation de la courbe variable et sa dérivée partielle par rapport à cette constante.*

Nous avons fait remarquer que les raisonnements qui ont conduit à cette règle supposent que la fonction $F(x, y, a)$ n'ait qu'une seule valeur, pour un même système de valeurs de x, y, a; car, sans cela, il serait possible qu'on dût prendre deux des formes différentes de cette fonction dans les équations des deux courbes voisines. Dans ce cas, on ne pourrait supprimer $F(x, y, a)$ dans la seconde, et les valeurs limites de x, y seraient celles qui rendraient égales les deux valeurs de cette fonction.

La propriété remarquable qu'a cette courbe d'être tangente à toutes les positions successives de la courbe variable, et que nous avons démontrée géométriquement, peut être établie comme il suit par le calcul.

En effet, si de l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ on tire $a = \varphi(x, y)$, et qu'on substitue cette valeur dans $F(x, y, a) = 0$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$(1) \qquad F[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

Soit l'équation d'une quelconque des courbes variables

$$(2) \qquad F(x, y, a) = 0.$$

Ces deux courbes (1) et (2) ont généralement des points communs, d'après la génération de la première; or il est facile de démontrer qu'en ces points la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même d'après les deux équations.

En effet, l'équation (1) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{dF}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x, y)$ y remplace a, et $\varphi(x, y)$ est précisément la valeur de a qui rend nul $\frac{dF}{da}$; donc $\frac{dF}{d\varphi}$ est identiquement nul; et il reste pour déterminer $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (1),

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Maintenant l'équation (2) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que a y remplace $\varphi(x, y)$. Mais pour le point commun aux deux courbes, on a $a = \varphi(x, y)$, puisque cette équation n'est

autre que $\frac{dF}{da} = 0$: donc, en ce point, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même pour les deux courbes ; donc enfin la courbe variable est constamment tangente à la courbe fixe qui est le lieu de ses intersections successives, et c'est pour cela qu'on a donné à cette dernière le nom de *courbe enveloppe*.

Néanmoins il ne faut pas croire que la courbe enveloppe soit nécessairement tangente à toutes les courbes variables; cela n'a lieu que pour celles qui sont coupées par les courbes infiniment voisines, et les raisonnements précédents ne s'appliquent qu'à celles-là. Or il peut arriver que ce ne soit qu'entre certaines limites de la constante que cette intersection ait lieu. Il est donc plus exact de définir la courbe enveloppe par la propriété d'être le lieu des intersections successives des courbes variables que par celle d'être tangente à ces courbes dans toutes leurs positions.

267. Si l'on prend pour la ligne variable la normale à une courbe donnée, l'enveloppe sera le lieu des centres de courbure, puisqu'on a démontré qu'ils sont les limites des rencontres des normales infiniment voisines. En appliquant à cette question la théorie qui vient d'être exposée, il est facile de voir que le calcul conduit à la développée. En effet, l'équation d'une normale quelconque est

$$y - y' = -\frac{1}{\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}(x - x');$$

y' est une fonction connue de x', et x' remplace ici la constante a. Différentiant cette équation par rapport à x', il vient

$$-\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\frac{dy'^2}{dx'^2}}(x - x') + \frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où

$$x - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, par suite,

$$y - y' = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Ces valeurs de x et y sont précisément celles de α et β du n° 262. Pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe, il faudrait éliminer x' entre ces deux équations, après avoir préalablement remplacé y' en fonction de x' : ce qui revient à éliminer x', y' entre ces deux équations et celle de la courbe donnée. Ce calcul n'est autre que celui qui est indiquée n° 262 pour obtenir l'équation de la développée.

Applications des théories précédentes.

268. *Parabole.* — Soit $x^2 = 2py$; on en tire

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

La valeur du rayon de courbure sera

$$R = p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - \beta = -p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)$$

et

$$x - \alpha = x\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{x^3}{p^2}.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la parabole, on trouve, pour équation de la développée,

$$6 - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe a un rebroussement du premier genre au point pour lequel $\alpha = 0$.

Ellipse. — L'équation $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

$$R = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Or, en désignant toujours par N la longueur de la normale, on a

$$N = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2};$$

donc

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

p désignant le demi-paramètre.

On trouverait la même formule pour l'hyperbole et la parabole. Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - 6 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) y}{a^2 b^4}, \quad x - \alpha = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) x}{b^2 a^4}.$$

Si, au moyen de l'équation de l'ellipse, on élimine x de la première et y de la seconde, on trouve, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$y^3 = -\frac{b^4 \beta}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4 \alpha}{c^2},$$

ou

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \alpha^{\frac{1}{3}},$$

et, substituant dans l'équation de l'ellipse, on a, pour l'équation de la développée,

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}};$$

l'équation de la développée de l'hyperbole serait

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}.$$

Elle se déduirait de celle de l'ellipse en y changeant b^2 en $-b^2$.

Cycloïde. — L'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

et, par suite,

$$R = 2\sqrt{2ay} = 2N,$$

N désignant la normale; d'où l'on conclurait, comme précédemment, que la développée d'une cycloïde se compose de deux demi-cycloïdes identiques à la première.

On peut déterminer l'aire de la cycloïde en la considérant comme la somme des parties comprises entre les rayons de courbure consécutifs.

Soient QH, PK (*fig.* 62) deux rayons infiniment voisins, S leur point de concours, et PR parallèle à AA'; le rapport des triangles semblables SLF, SRP est $\frac{SF^2}{SP^2}$, dont la limite est $\frac{1}{4}$; de plus, QRP est infiniment petit par rapport à ces triangles, ainsi que l'aire HSK. Donc la limite de la somme des aires LFPR, depuis A' jusqu'à A, est l'aire comprise entre la cycloïde AEA' et sa base; et la limite de la somme des triangles SLF est l'aire comprise entre AA' et les arcs AB, A'B : cette aire ajoutée à la première forme le rectangle construit sur AA' et $2a$. D'ailleurs le rapport de LFPR à SLF a pour limite 3, puisque le rapport de SPR

à SFL a pour limite 4. Donc l'aire de la cycloïde AEA′ est les trois quarts du rectangle qui a pour base $2\pi a$ et pour hauteur $2a$, et dont l'aire est, par conséquent, $4\pi a^2$.

L'aire de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, ou trois fois celle du cercle générateur.

Spirale logarithmique. — Son équation $r = ae^{m\theta}$ donne, comme on l'a vu ci-dessus,

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2ae^{m\theta},$$

$$N = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2} = MO(\textit{fig. } 91), \quad S_n = mae^{m\theta} = AO.$$

On trouvera, pour le rayon de courbure,

$$R = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2}, \quad \text{ou} \quad R = MO.$$

Le centre de courbure est donc à la rencontre de la normale avec la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur.

Si l'on pose

$$OAX = \theta', \quad OA = r',$$

l'équation polaire de la développée sera, d'après ce qui précède,

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On peut lui donner la même forme qu'à la proposée, en comptant les angles à partir d'une droite faisant avec AX un angle α tel que l'on ait

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1;$$

l'équation précédente devient alors

$$r' = ea^{m\theta}.$$

La développée d'une spirale logarithmique est donc une spirale identique, et qui coïnciderait avec elle, si on la fai-

sait tourner autour du pôle d'une quantité angulaire α égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m}$.

La différence des deux rayons de courbure MO, M'O' étant égale à l'arc OO' de la développée, il s'ensuit que si le point M' tend indéfiniment vers le pôle, ainsi que O', l'arc OO' se rapprochera indéfiniment d'être égal à MO.

Ainsi la longueur totale de l'arc d'une spirale logarithmique compris entre un point quelconque O et le pôle asymptote est égale à la tangente OM terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur AO, menée par le pôle.

CHAPITRE XV.

TANGENTES ET PLANS NORMAUX AUX COURBES A DOUBLE COURBURE, PLANS TANGENTS ET NORMALES AUX SURFACES COURBES.

269. Une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan est dite *à double courbure*. La tangente en un quelconque de ses points est la limite vers laquelle tend une sécante qui passe par ce point et par un autre appartenant aussi à la courbe, et qui se rapproche indéfiniment du premier.

On appelle *longueur d'un arc* la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit, lorsque ses côtés tendent tous vers zéro. Cette limite est indépendante du mode de division de l'arc, parce que les rapports des éléments correspondants de ces polygones, compris entre des plans parallèles infiniment voisins, ont pour limite l'unité.

On pourra donc encore prendre la corde ou la tangente au lieu de l'arc infiniment petit, et la différentielle ds de l'arc d'une courbe à double courbure aura pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

Une sécante passant par les points de la courbe ayant pour coordonnées

$$x,\ y,\ z, \quad \text{et} \quad x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z$$

fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\quad \frac{\Delta y}{\Delta s},\quad \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

en regardant Δs comme égal à sa corde, ce qui ne change pas les limites. Leurs signes apprennent si la droite dirigée du premier point vers le second fait avec les axes des angles aigus ou obtus.

Les limites de ces expressions, ou $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes

270. Les équations de la sécante passant par le point x', y', z' de la courbe et un autre point infiniment voisin sont

$$x - x' = \frac{\Delta x'}{\Delta z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta z'}(z - z'),$$

$\Delta z'$ étant l'accroissement arbitraire donné à z', et $\Delta x'$, $\Delta y'$ les accroissements correspondants des coordonnées de la courbe. Donc les équations de la tangente seront, en prenant ces rapports différentiels à leurs limites,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'),$$

dz' étant un accroissement arbitraire donné à x, et dx', dy' les différentielles des fonctions x', y' de z'.

Si la courbe est déterminée par les équations de ses projections sur les plans XZ, YZ, on tirera $\frac{dx'}{dz'}$ et $\frac{dy'}{dz'}$ de chacune d'elles.

Si elle est donnée par deux équations à trois variables

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{dF}{dz'} = 0, \quad \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{df}{dz'} = 0,$$

et il faudra tirer de ces deux équations les valeurs de

$\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, pour les reporter dans les précédentes, ou éliminer de toute autre manière $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, entre les quatre équations : on obtient ainsi, pour les équations de la tangente,

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0,$$
$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne sont autre chose que celles des plans tangents aux surfaces représentées par les deux équations données, et dont la courbe donnée est l'intersection.

271. On appelle *plan normal* celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Son équation sera, d'après celles que nous avons données d'abord pour la tangente,

$$z-z'+\frac{dx'}{dz'}(x-x')+\frac{dy'}{dz'}(y-y')=0.$$

ou

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

On pourrait parvenir à cette même équation en cherchant le lieu des droites menées par le point x', y', z', perpendiculairement à la tangente. Soient, en effet, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces droites, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont proportionnels aux quantités $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$; ceux qui se rapportent à la tangente sont proportionnels à dx', dy', dz'; or, pour que ces deux directions soient perpendiculaires, il faut que le cosinus de leur angle soit nul; d'où résulte, pour tous les points du lieu,

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

272. On peut encore obtenir l'équation du plan normal en le considérant comme la limite du plan qui renferme les points communs à deux sphères égales ayant leurs centres en deux points de la courbe, infiniment voisins.

Soient x', y', z' les coordonnées du premier point, $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ celles du second, et R le rayon des sphères ; l'équation de la première est

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=\mathrm{R};$$

celle de la seconde est

$$(x-x'-\Delta x')^2+(y-y'-\Delta y')^2+(z-z'-\Delta z')^2=\mathrm{R}^2.$$

Elles ont lieu en même temps pour les points communs, et si on les soustrait l'une de l'autre, on trouve, en négligeant les infiniment petits du second ordre et substituant les différentielles aux différences,

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

Cette équation étant du premier degré est celle du plan qui contient le cercle d'intersection des sphères, pris à sa limite, ou du plan normal.

Toute ligne située dans le plan normal est dite *normale* à la courbe.

Tout plan passant par la tangente est nommé *plan tangent* à la courbe.

Plans tangents, plans normaux et normales aux surfaces courbes.

273. *Plan tangent.* — Une tangente à une surface est la limite vers laquelle tend une sécante menée par un point de cette surface, lorsqu'un second point d'intersection tend vers le premier.

Ce second point pouvant tendre d'une infinité de manières vers le premier, il y a une infinité de tangentes à la surface en ce point, et elles ne sont autre chose que les tangentes aux courbes que le second point a suivies sur la surface, en se rapprochant du premier. Nous allons démontrer que le lieu de toutes ces tangentes est un plan, et nous lui donnerons le nom de *plan tangent*.

Pour déterminer, en général, le lieu de ces tangentes, soit

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{ou} \quad z = f(x, y)$$

l'équation de la surface.

Les équations d'une tangente quelconque au point x', y', z' seront, comme nous l'avons vu,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z');$$

les quantités $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sont indéterminées, mais liées entre elles par l'équation

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'},$$

dans laquelle p et q représentent les dérivées partielles $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)$, tirées de l'équation $z = f(x, y)$. En effet, cette dernière donne

$$\Delta z' = p\Delta x' + q\Delta y' + \omega,$$

ω étant indéfiniment petit par rapport à $\Delta x'$, $\Delta y'$, Δz ; et l'on en tire, en divisant par $\Delta z'$, et passant aux limites, en regardant x', y' comme des fonctions de z,

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'} \quad \text{ou} \quad dz' = pdx' + qdy',$$

d'où l'on voit que si, au lieu de regarder dz' comme arbi-

traire et dx', dy' comme des différentielles déterminées par les équations de la courbe, on considérait dx', dy' comme des accroissements arbitraires, dz' serait la différentielle du z' de la surface.

Si l'on élimine $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ entre les trois équations précédentes, on aura l'équation du lieu de toutes les tangentes. On trouve ainsi

$$1 = p\frac{(x-x')}{z-z'} + q\frac{(y-y')}{z-z'},$$

et

$$z - z' = p(x-x') + q(y-y').$$

Cette équation étant du premier degré par rapport à x, y, z, il s'ensuit que le lieu des tangentes est un plan.

L'équation du plan tangent prend une autre forme quand l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

et non résolue par rapport à z.

On déterminera $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ par les équations

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

et l'équation du plan tangent sera

$$(x-x')\frac{dF}{dx'} + (y-y')\frac{dF}{dy'} + (z-z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

274. *Normale.* — La normale est la perpendiculaire au plan tangent, menée au point de contact; ses équations seront donc

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z-z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z-z'),$$

ou

$$(x-x')\frac{dF}{dz'}=(z-z')\frac{dF}{dx'},\quad (y-y')\frac{dF}{dz'}=(z-z')\frac{dF}{dy'}.$$

Plan normal. — Si, au point de contact d'une tangente à une surface, on mène un plan perpendiculaire à cette ligne, on aura un *plan normal* à la surface. On trouvera son équation, soit en partant des équations d'une tangente, soit par l'intersection de deux sphères égales dont les centres se rapprochent indéfiniment. De cette manière on aura, pour l'équation d'un plan normal quelconque au point x', y', z',

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

Elle est indéterminée, parce que les différentielles dx', dy', dz' ne sont assujetties qu'à la condition

$$dz'=pdx'+qdy'=\frac{dz'}{dx'}dx'+\frac{dz'}{dy'}dy';$$

et si l'on substitue cette valeur de dz', on obtient

$$dx'\left[x-x'+\frac{dz'}{dx'}(z-z')\right]$$
$$+dy'\left[y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')\right]=0.$$

Cette équation changera avec le rapport que l'on établira entre dx', dy', et représentera tous les plans normaux au point donné.

De cette équation au plan normal on peut déduire celle de la normale, et par suite du plan tangent. En effet, on voit qu'elle est satisfaite, quel que soit le rapport de dy' à dx', si l'on pose les deux équations

$$x-x'+\frac{dz'}{dx'}(z-z')=0,\quad y-y'+\frac{dz'}{dy'}(z-z')=0.$$

Donc tous les plans normaux se coupent suivant une même droite, représentée par ces deux équations. Cette droite étant perpendiculaire à toutes les tangentes, ces dernières sont toutes dans un même plan, ayant pour équation

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

On trouve ainsi, indépendamment de la première méthode, les équations du plan tangent et de la normale.

Sur la distance des droites successives d'un système continu.

275. Si l'on considère une série de droites dont les équations générales dépendent d'une constante dont la valeur puisse varier arbitrairement et d'une manière continue, la plus courte distance de deux de ces droites, correspondant à des différences infiniment petites entre les constantes, peut être du même ordre que ces différences, ou d'un ordre différent.

L'objet que nous nous proposons ici est de déterminer avec plus de précision qu'on ne l'a fait jusqu'ici l'ordre infinitésimal de cette distance, et c'est ce que nous ferons au moyen d'une remarque curieuse due à M. Bouquet. Elle consiste en ce que, *si dans une série continue quelconque de droites la distance de deux consécutives est généralement d'un ordre supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Soient, en effet,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations d'une droite quelconque de la série a, b, α, β

dépendant d'une certaine constante unique; Δa, Δb, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$ les accroissements des constantes, en passant à une droite infiniment voisine, faisant partie de la même série; la plus courte distance δ de ces deux droites sera, d'après une formule élémentaire connue,

$$\delta = \frac{\Delta a \Delta \beta - \Delta b \Delta \alpha}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a \Delta b - b \Delta a)^2}}.$$

Or on a

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{2.3} d^3 a + \ldots,$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{2.3} d^3 b + \ldots,$$

$$\Delta \alpha = d\alpha + \frac{1}{2} d^2 \alpha + \frac{1}{2.3} d^3 \alpha + \ldots,$$

$$\Delta \beta = d\beta + \frac{1}{2} d^2 \beta + \frac{1}{2.3} d^3 \beta + \ldots;$$

il en résulte

$$\Delta a \Delta \beta - \Delta a \Delta \alpha = (da\, d\beta - db\, d\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2} (da\, d^2 \beta + d\beta\, d^2 a - db\, d^2 \alpha - d\alpha\, d^2 b) + \ldots.$$

Or, si le premier terme $da\, d\beta - db\, d\alpha$ n'est pas nul, le dénominateur de δ étant un infiniment petit du premier ordre, et son numérateur du second, δ sera du premier ordre. Si, au contraire, on a constamment

$$da\, d\beta - db\, d\alpha = 0,$$

le numérateur devient d'un ordre plus élevé de deux unités, parce que l'ensemble des termes du troisième ordre n'est autre chose que la moitié de la différentielle de $da\, d\beta - db\, d\alpha$, et cette dernière quantité étant constamment nulle, sa différentielle l'est aussi.

Q'où résulte cette conséquence remarquable que, *si la distance de deux droites consécutives, prises dans une série*

quelconque, est généralement d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, elle est au moins du troisième.

Le théorème que nous venons de démontrer est soumis, comme presque tous les autres, à des exceptions très-particulières; il est fondé sur des développements généralement possibles, mais qui, pour certains points singuliers, pourraient devenir illusoires.

Application aux tangentes à une courbe.

276. Les équations d'une tangente quelconque sont

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

On a donc, dans ce cas,

$$a = \frac{dx'}{dz'}, \quad b = \frac{dy'}{dz'}, \quad \alpha = x' - z'\frac{dx'}{dz'}, \quad \beta = y' - z'\frac{dy'}{dz'}.$$

Nous prendrons z' pour la constante qui détermine la position de la droite, et dont x', y' sont des fonctions d'après les équations de la courbe.

Cela posé, on aura

$$\frac{da}{dz'} = \frac{d^2x'}{dz'^2}, \quad \frac{db}{dz'} = \frac{d^2y'}{dz'^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dz'} = -z'\frac{d^2x'}{dz'^2}, \quad \frac{d\beta}{dz'} = -z'\frac{d^2y'}{dz'^2},$$

et, par conséquent,

$$da\,d\beta - db\,d\alpha = 0.$$

Donc, en général, dans toute courbe à double courbure, la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est un infiniment petit du troisième ordre, si la distance des deux points de contact est du premier.

Application aux normales à une surface.

277. Les équations générales d'une normale sont

$$x - x' = -p(z - z'), \quad y - y' = -q(z - z'),$$

p et q désignant les dérivées partielles $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$.

Si maintenant on conçoit une courbe quelconque sur la surface, en établissant entre x', y', z' une seconde équation au moyen de laquelle ces trois coordonnées dépendront d'une seule d'entre elles, ou de toute autre variable indépendante, on peut se proposer de déterminer cette courbe de manière que la plus courte distance des deux normales, correspondant à des valeurs infiniment voisines de la constante, c'est-à-dire à deux points infiniment voisins de la courbe, soit un infiniment petit du troisième ordre, la distance des deux points étant du premier.

Dans le cas actuel, on aura

$$a = -p, \quad b = -q, \quad \alpha = x' + pz', \quad \beta = y' + qz',$$

et l'équation $da\,d\beta - db\,d\alpha$ devient

$$(dy + q\,dz')dp = (dx' + p\,dz')dq.$$

En remplaçant dz' par sa valeur $p\,dx' + q\,dy'$, et formant les différentielles dp, dq d'après les dérivées partielles $\frac{d^2z'}{dx'^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'\,dy'}$, $\frac{d^2z'}{dy'^2}$, que nous désignerons par r, s, t, cette équation devient

$$(sq^2 - pqt + s)\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2$$
$$+ [r(1 + q^2) - t(1 + p^2)]\frac{dy'}{dx'} + pqr - s(1 + p^2) = 0.$$

Cette équation, jointe à celle de la surface, détermine les

courbes jouissant de la propriété demandée, et que l'on nomme *lignes de courbure* de la surface. Nous reviendrons sur ce point quand nous aurons étudié les équations différentielles. Nous nous bornerons à remarquer que l'équation donnant deux valeurs pour $\frac{dy'}{dx'}$, il y a en chaque point de la surface deux directions jouissant de la propriété en question.

CHAPITRE XVI.

PLAN OSCULATEUR D'UNE COURBE. CERCLE OSCULATEUR. ANGLE DE CONTINGENCE. ANGLE DE TORSION. SURFACE POLAIRE. CENTRE DE LA SPHÈRE OSCULATRICE. CONTACTS DES COURBES A DOUBLE COURBURE. DÉVELOPPÉES DE CES COURBES. CONTACTS DES SURFACES.

278. *Plan osculateur.* — On appelle ainsi la limite vers laquelle tend le plan qui passe par trois points d'une courbe, qui tendent indéfiniment à se réduire à un seul. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ celles d'un point infiniment voisin, et $x'+2\Delta x'+\Delta^2 x'$, $y'+2\Delta y'+\Delta^2 y'$, $z'+2\Delta z'+\Delta^2 z'$ celles d'un troisième point de la courbe; les différentielles étant déterminées d'après les accroissements égaux d'une variable quelconque, dont x', y', z' sont des fonctions déterminées.

Tout plan qui passe par le premier point a pour équation

$$z-z'=a(x-x')+b(y-y');$$

pour qu'il passe par les deux autres, on aura les conditions

$$\Delta z'=a\Delta x'+b\Delta y',$$
$$\Delta^2 z'=a\Delta^2 x'+b\Delta^2 y';$$

et pour le plan limite ces équations auront lieu entre les différentielles

$$dx',\quad dy',\quad dz',\quad d^2x',\quad d^2y',\quad d^2z'.$$

Les valeurs de a et b tirées de ces deux équations, et reportées dans celle du plan, donnent l'équation du plan osculateur, qui est

$$(x-x')(dy'd^2z'-dz'd^2y')+(y-y')(dz'd^2x'-dx'd^2z')$$
$$+(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')=0.$$

279. Si l'on cherchait la limite des plans passant par la tangente en un point d'une courbe, et par un autre de ses points tendant vers le premier, il est facile de voir qu'on retrouverait le plan osculateur.

En effet, les équations de la tangente sont

$$x-x'=\frac{dx'}{dz'}(z-z'),\quad y-y'=\frac{dy'}{dz'}(z-z'),$$

et le plan dont l'équation est

$$z-z'=a(x-x')+b(y-y')$$

contiendra cette tangente, si l'on a

$$1=a\frac{dx'}{dz'}+b\frac{dy'}{dz'},\quad \text{ou}\quad dz'=adx'+bdy',$$

ou, prenant t pour variable indépendante,

$$\frac{dz'}{dt}=a\frac{dx'}{dt}+b\frac{dy'}{dt}.$$

Pour que ce même plan passe par un point ayant pour coordonnées $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$, il faudra que l'on ait

$$\Delta z'=a\Delta x'+b\Delta dy'.$$

Mais on pourra, dans cette équation, négliger les termes du second ordre, parce que tous ceux du premier disparaissent, en vertu de l'équation précédente.

En effet, si l'on développe les différences, et qu'on se

borne au second ordre, on aura

$$\Delta z' = \frac{dz'}{dt}\Delta t + \frac{d^2z'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta y' = \frac{dy'}{dt}\Delta t + \frac{d^2y'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta x' = \frac{dx'}{dt}\Delta t + \frac{d^2x'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, les termes qui renferment Δt au premier degré disparaissent, et il reste, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, et divisant par $\frac{\Delta t^2}{2}$,

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad d^2z' = a\,d^2x' + b\,d^2y'.$$

Les coefficients a et b sont donc déterminés par les mêmes équations que précédemment, et l'on trouve l'équation du plan osculateur.

On trouverait encore le même plan en cherchant la limite de celui qui passerait par une tangente et une parallèle à la tangente infiniment voisine.

280. *Angle de contingence.* — On appelle ainsi l'angle de deux tangentes infiniment voisines, ou, pour parler rigoureusement, une quantité dont le rapport à l'accroissement de la variable indépendante soit égal à la limite du rapport de l'angle des tangentes à ce même accroissement. Ces tangentes n'étant pas dans un même plan, leur angle est celui de deux droites qui passeraient par un même point et leur seraient parallèles. Soient a, b, c les cosinus des angles formés avec les axes par la première tangente, et $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ ceux qui se rapportent à la

seconde; le cosinus de l'angle ω de ces deux directions sera

$$\begin{aligned}\cos\omega &= a^2 + b^2 + c^2 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c\\ &= 1 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c.\end{aligned}$$

De l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

on tire

$$2a\Delta a + 2b\Delta b + 2c\Delta c + \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 = 0;$$

donc

$$1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}.$$

Si l'on remplace $\sin\omega$ par ω, et les différences par les différentielles, ω sera ce que nous avons appelé l'angle de contingence, et l'on aura

$$\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

On pourrait encore établir cette formule par des considérations géométriques.

Menant MB (*fig.* 92) parallèle à la seconde tangente, et prenant MA = MB = 1, on a

$$\text{arc AB} = \omega.$$

Projetant le triangle rectiligne MAB sur les trois axes, et appelant λ, μ, ν les angles de la direction AB avec les directions positives de ces axes, on pourra écrire

$$da = \omega\cos\lambda, \quad db = \omega\cos\mu, \quad dc = \omega\cos\nu,$$

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad \cos\lambda = \frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \cos\nu = \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}.$$

Cela fait connaître l'angle de contingence et les cosinus

des angles de la direction prise du point M vers le centre de courbure.

Or on a

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

d'où l'on tire

$$da = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2},$$

$$dc = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2};$$

substituant ces valeurs dans celle de ω, et observant qu'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z,$$

on obtiendra

$$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

On peut faire disparaître d^2s de cette expression, en tirant sa valeur de l'équation précédente : on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

281. Si, au lieu de chercher l'angle de deux tangentes en des points M, M′ infiniment voisins (*fig.* 93), on cherchait l'angle de la corde MM′ avec la corde M′M″, en supposant les deux points A′M″ correspondant aux accroissements égaux d'une variable quelconque t, on trouverait la même expression pour l'angle TM′M″. En effet, les cosinus des angles de MT avec les axes sont les rapports $\frac{\Delta x}{\mathrm{MM'}}$, $\frac{\Delta y}{\mathrm{MM'}}$, $\frac{\Delta z}{\mathrm{MM'}}$, et diffèrent de quantités infiniment petites de leurs limites respectives $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Le changement de t

en $t + dt$ donnera donc les mêmes accroissements dans les uns et les autres, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui des accroissements. Il est donc inutile de recommencer ici les calculs précédents; et la valeur de TM′M″ aura la même expression que celle de l'angle de contingence ω.

282. *Cercle osculateur.* — Dans les courbes à double courbure, comme dans les courbes planes, nous appellerons *cercle osculateur* la limite du cercle qui passe par trois points infiniment voisins; ce cercle limite se trouvera évidemment dans le plan osculateur.

Soient M (*fig.* 94) un point quelconque de la courbe; M′, M″ des points qui s'en approchent indéfiniment; O le point de rencontre des perpendiculaires menées par M, M′ à ces deux cordes, dans le plan qui les contient : M′O sera le diamètre du cercle passant par M, M′, M″. L'angle O a pour mesure l'arc de cercle MM′M″ divisé par le diamètre M′O. Or on peut substituer à cet arc celui de la courbe, ou $2\Delta s + \Delta^2 s$.

On aura donc $M'O = \frac{2\Delta s}{O}$ en négligeant $\Delta^2 s$.

Mais l'angle O est égal à TM′M″, qui peut être remplacé par l'angle de contingence ω relatif à l'arc Δs. On aura ainsi, en désignant par R le rayon du cercle osculateur, $R = \frac{ds}{\omega}$; d'où, en remettant pour ω l'une ou l'autre des deux expressions données précédemment, on tire les formules rigoureusement exactes

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

et

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}$$

283. *Angle de torsion.* — On appelle ainsi l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, ou, pour parler plus exactement, la différentielle correspondante.

Soient α, β, γ les angles que fait avec les axes la normale à un plan osculateur; on aura, d'après l'équation de ce plan, x, y, z étant les coordonnées du point de la courbe,

$$\cos\alpha = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{D};$$

$$\cos\beta = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{D},$$

$$\cos\gamma = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{D},$$

en posant

$$D = \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

La normale au plan osculateur infiniment voisin fera avec la précédente un angle égal à celui des deux plans; si on le désigne par U, on aura, par un calcul semblable à celui qui a donné l'angle de contingence,

$$U = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Mais il faut l'obtenir en fonction des différentielles de x, y, z; pour cela, posant

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = X, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = Y,$$
$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = Z,$$

d'où

$$dy\,d^3z - dz\,d^3y = dX, \quad dz\,d^3x - dx\,d^3z = dY,$$
$$dx\,d^3y - dy\,d^3x = dZ,$$

on trouvera

$$U = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2) - (X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(X\,dY - Y\,dX)^2 + (Y\,dZ - Z\,dY)^2 + (Z\,dX - X\,dZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Mais on a

$$\frac{Y\,dZ - Z\,dY}{dx} = \frac{Z\,dX - X\,dZ}{dy} = \frac{X\,dY - Y\,dX}{dz}$$
$$= dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z)$$
$$+ dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x).$$

Donc

$$U = ds\,\frac{dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)}{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

Il n'y a pas lieu de représenter cette seconde courbure par celle d'un cercle qui se présenterait aussi naturellement que le cercle osculateur qui mesure la première.

On trouverait la même expression, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, en considérant trois côtés consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit, et cherchant l'angle que le plan des deux premiers fait avec le plan du deuxième et du troisième.

284. Si le rayon de la première courbure est infini pour tous les points d'une ligne, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement les uns des autres, et, par conséquent, cette ligne est droite. La condition pour qu'une ligne soit droite pourrait donc s'exprimer par l'équation différentielle

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = 0, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = 0, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0$$

ou encore

$$d\frac{dz}{dy} = 0, \quad d\frac{dx}{dz} = 0, \quad d\frac{dy}{dx} = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dx}{dz} = a, \quad \frac{dy}{dz} = b,$$

a et b étant des constantes arbitraires. Et comme a et b sont les dérivées de az et bz, il suit d'une proposition démontrée précédemment que les fonctions x et y ne peuvent être que de la forme

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

α et β désignant des constantes arbitraires. On retombe ainsi sur les équations générales de la ligne droite.

Si la seconde courbure est nulle, tous les plans osculateurs se confondront, et la courbe sera plane. La condition pour qu'une courbe soit plane est donc exprimée par l'équation différentielle

$$dx(d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y) + dy(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) \\ + dz(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x) = 0,$$

équation qui se réduit à

$$d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = 0,$$

si l'on prend x pour variable indépendante.

On vérifie bien facilement que cette relation existe pour tous les points d'une ligne située tout entière dans un plan.

285. *Surface polaire.* — Si l'on conçoit un polygone infinitésimal inscrit dans une courbe à double courbure, et qu'on élève des plans perpendiculaires au milieu de ses côtés successifs, la ligne d'intersection de deux de ces plans consécutifs sera le lieu des pôles du cercle passant par les trois sommets correspondants du polygone; et sa limite sera le lieu des pôles du cercle osculateur, vers lequel tend le cercle variable.

Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'on trouverait la même ligne en cherchant la limite de l'intersection de deux plans normaux consécutifs.

Si l'on agit de la même manière en tous les points de la courbe donnée, on obtiendra une suite de lignes polaires

qui formeront une surface qu'on nomme *surface polaire*. Elle n'est autre chose que le lieu des centres des sphères limite de celles qui ont trois points infiniment voisins, communs avec la courbe. Cette surface est développable; car elle est la limite d'une surface qui se compose d'éléments plans indéfinis compris entre les deux intersections successives de trois plans consécutifs. De plus, ces éléments plans ont pour limite de leurs directions celle des plans tangents: donc tous les plans normaux à la courbe sont tangents à sa surface polaire, et cette dernière peut être considérée comme la surface enveloppe de ces plans.

286. *Sphère osculatrice.* — On désigne sous ce nom la limite des sphères qui ont avec la courbe quatre points communs qui se rapprochent indéfiniment. Le centre de la sphère passant par quatre sommets consécutifs du polygone inscrit est à la rencontre des deux droites suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires aux trois côtés consécutifs du polygone; c'est le point commun à deux droites polaires consécutives.

Les centres de ces sphères successives déterminent un polygone qui tend vers une courbe dont les droites polaires sont les tangentes; cette courbe est donc l'enveloppe des polaires. Elle est aussi l'arête de rebroussement de la surface développable, lieu de ces polaires, c'est-à-dire de la surface polaire.

287. *Équation de la surface polaire.* — Cette surface est le lieu des intersections successives des plans normaux, ou encore des normales à la courbe donnée. Or l'équation d'un plan normal quelconque est

$$(1) \qquad (x - x')dx' + (y - y'dy') + (z - z')dz' = 0.$$

Si l'on donne à la variable indépendante t, dont on regarde

x', y', z' comme des fonctions connues, un accroissement infiniment petit Δt, et que l'on considère le plan normal, au point voisin qui en résulte, son équation se composera des mêmes termes que la précédente, plus les termes résultant du changement des quantités x', y', z', dx', dy', dz'. Les premiers termes s'annulent pour les points communs aux deux plans, et il reste, en négligeant ceux du troisième ordre et passant aux différentielles,

$$(2)\quad (x-x')d^2x' + (y-y')d^2y' + (z-z')d^2z' - ds'^2 = 0.$$

Les équations (1) et (2) ont donc lieu entre les coordonnées x, y, z de tous les points d'une des génératrices de la surface polaire.

Donc on aura l'équation de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre les équations (1), (2) et celles de la courbe donnée.

288. *Centre de la sphère osculatrice.* — Ce centre est la limite du point de rencontre de trois plans normaux consécutifs, ou de deux droites suivant lesquelles se coupent les deux premiers et les deux derniers de ces plans. L'une est représentée à la limite par les deux équations (1), (2); l'autre par ces équations augmentées de leurs différentielles. Pour la limite du point commun aux deux droites, les différentielles des équations (1), (2) par rapport à x', y', z', dx',... seront donc nulles, et il en résultera cette nouvelle équation

$$(3)\quad (x-x')d^3x' + (y-y')d^3y' + (z-z')d^3z' - 3ds'd^2s' = 0.$$

Les équations (1), (2), (3) donnent le centre de la sphère osculatrice correspondant au point (x', y', z'); et l'on aura les équations du lieu de ces centres, ou de l'arête de rebroussement de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre ces trois équations et celles de la courbe donnée; d'où il résulte deux équations entre x, y, z.

289. Il est facile de reconnaître, au moyen des équations (1), (2), que tout plan normal à la courbe est tangent à la surface polaire. En effet, considérons sur cette dernière un point quelconque infiniment voisin de celui qui a pour coordonnées x, y, z et qui se trouve dans le plan normal déterminé par l'équation (1). Soient considérés dx, dy, dz comme les différences de leurs coordonnées : les équations (1), (2) sont satisfaites par les coordonnées du premier point; et elles le seront par celles du deuxième, si l'on considère le plan normal infiniment voisin qui passe par ce deuxième point.

Or, si l'on donne à x, y, z, x', y', z' les accroissements correspondants dx, dy, dz, dx', dy', dz', dans l'équation (1), il restera, en vertu de l'équation (2),

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = 0.$$

Mais la droite qui joint les deux points pris sur la surface polaire, et finit par lui être tangente, fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz; l'équation précédente prouve donc que cette droite est perpendiculaire à la tangente à la courbe au point (x', y', z'), et que, par conséquent, elle est située dans le plan normal, au même point de cette courbe, puisqu'elle a déjà le point (x, y, z) commun avec ce plan.

290. *Centre de courbure.* — Le centre du cercle osculateur, ou le centre de la première courbure, se trouve dans le plan osculateur, et sur la droite polaire du point que l'on considère sur la courbe. On aura donc ses coordonnées en cherchant les valeurs de x, y, z qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz' &= 0,\\
(x - x')d^2x' + (y - y')d^2y' + (z - z')d^2z' &= ds'^2,\\
(x - x')(dy'd^2z' - dz'd^2y') + (y - y')(dz'd^2x' - dx'd^2z')&\\
+ (z - z')(dx'd^2y' - dy'd^2x') &= 0.
\end{aligned}$$

Ces valeurs de x, y, z sont données par les formules suivantes :

$$z - z' = \frac{R^2}{ds'^4}[dy'(dy'd^2z' - dz'd^2y') - dx'(dz'd^2x' - dx'd^2z')],$$

$$y - y' = \frac{R^2}{ds'^4}[dx'(dx'd^2y' - dy'd^2x') - dz'(dy'd^2z' - dz'd^2y')],$$

$$x - x' = \frac{R^2}{ds'^4}[dz'(dz'd^2x' - dx'd^2z') - dy'(dx'd^2y' - dy'd^2x')],$$

R désignant le rayon de courbure, dont la valeur est

$$R = \frac{ds'^3}{\sqrt{(dy'd^2z' - dz'd^2y')^2 + (dz'd^2x' - dx'd^2z')^2 + (dx'd^2y' - dy'd^2x')^2}}.$$

Si, au lieu de déterminer les coordonnées du centre de courbure, on voulait les équations du lieu de ces centres, il suffirait d'éliminer x', y', z' entre les trois premières équations et celles de la courbe donnée; les deux équations résultantes entre x, y, z seraient celles du lieu demandé.

291. *Contact des courbes à double courbure.* — Cette théorie est semblable à celle que nous avons donnée pour les courbes planes ; seulement, au lieu de couper les courbes par des droites parallèles à un axe, il faudra les couper par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, par exemple au plan x, y. Ainsi, lorsque deux courbes auront un point commun x', y', z', et qu'en les coupant par un plan parallèle à un plan x, y et situé à une distance infiniment petite dz' du point commun, la distance des deux points ainsi obtenus sur ces courbes sera infiniment petite, de l'ordre $n + 1$, on dira que les courbes ont un contact de l'ordre n. On reconnaît facilement que l'ordre de cette distance infiniment petite est le même pour des plans coordonnés quelconques, pourvu que les tangentes à ces courbes au point commun ne soient pas parallèles au plan sécant.

La projection d'une droite sur un plan étant égale au produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur ce plan, le rapport des longueurs de la droite et de sa projection a une limite finie, si la limite de cette droite ne fait pas un angle droit avec le plan. Donc les trois projections orthogonales d'une droite variable de grandeur et de direction sont, en général, des grandeurs du même ordre que cette droite; et il en est toujours ainsi pour deux de ses projections au moins : il ne peut y avoir qu'une d'entre elles, au plus, qui soit infiniment petite par rapport à cette droite. D'où il suit que, pour que deux courbes à double courbure aient un contact de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que deux de leurs projections aient un contact de cet ordre; ce qui ramène à la théorie du contact des courbes planes. Ainsi les conditions pour que ce contact ait lieu au point dont les coordonnées sont x', y', z' consistent en ce que, pour la valeur z' de z, les quantités

$$x,\quad y,\quad \frac{dx}{dz},\quad \frac{dy}{dz},\quad \frac{d^2x}{dz^2},\quad \frac{d^2y}{dz^2},\ldots,\quad \frac{d^nx}{dz^n},\quad \frac{d^ny}{dz^n}$$

aient les mêmes valeurs d'après les équations de ces deux courbes. On obtiendra donc encore la courbe osculatrice d'une espèce donnée, en déterminant les coefficients de ses équations, de manière qu'il en résulte le plus de dérivées communes avec la courbe donnée, à partir des premières. Si les projections sur un plan avaient un contact plus élevé que les projections sur un autre, il suit de ce qui précède que le moins élevé des deux exprimerait l'ordre du contact de deux courbes proposées.

292. *Droite osculatrice.*— Les équations générales d'une droite étant

$$x = az + \alpha,\quad y = bz + \beta,$$

les équations qui détermineront a, α, b, β seront

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta, \quad \frac{dx'}{dz'} = a, \quad \frac{dy'}{dz'} = b,$$

les dérivées $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ étant tirées des équations de la courbe donnée. La droite osculatrice a donc pour équations

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z');$$

ce sont celles que nous avons déjà trouvées par la tangente.

293. *Cercle osculateur.* — Les équations les plus commodes pour la détermination d'un cercle dans l'espace sont celles d'une sphère et d'un plan. Soient donc les équations générales du cercle

$$(1) \qquad (z - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad z + ax + by + c = 0;$$

différentiant deux fois ces équations, en considérant x et y comme fonctions de z, et les autres quantités comme constantes, on aura les équations suivantes :

$$(3) \qquad (z - \gamma) + (y - \beta)\frac{dy}{dz} + (x - \alpha)\frac{dx}{dz} = 0,$$

$$(4) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dz^2} + \frac{dx^2}{dz^2} + (y - \beta)\frac{d^2y}{dz^2} + (x - \alpha)\frac{d^2x}{dz^2} = 0,$$

$$(5) \qquad 1 + a\frac{dx}{dz} + b\frac{dy}{dz} = 0,$$

$$(6) \qquad a\frac{d^2x}{dz^2} + b\frac{d^2y}{dz^2} = 0.$$

On remettra dans ces six équations, au lieu de x, y, z, les coordonnées du point donné de la courbe, et l'on rempla-

cera toutes les dérivées par celles qui donneront les équations de cette même courbe. On en déduira les valeurs de six des constantes a, b, c, α, β, γ, R, et il en restera une indéterminée, parce qu'on peut faire passer une infinité de sphères par un même cercle.

Les coefficients a, b, c sont entièrement déterminés, et l'équation du plan devient, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$(z - z')(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') - dz'\,d^2y'(x - x') + dz'\,d^2x'(y - y') = 0.$$

Cette équation n'est autre chose que celle du plan osculateur, dans laquelle z est pris pour variable indépendante. Les équations (3), (4), dans lesquelles on regardera α, β, γ comme variables, représentent deux plans qui sont perpendiculaires au plan (2), en vertu des équations (5), (6). Les centres des sphères sont donc sur une perpendiculaire au plan du cercle, et elles couperont toutes ce plan suivant un même cercle, puisqu'elles passeront d'ailleurs par un même point (x', y', z').

Il est facile de reconnaître dans les équations (3), (4) celles qui déterminent la droite polaire relative au point (x', y', z') quand on prend z pour variable indépendante; et comme le centre du cercle s'obtiendra en cherchant l'intersection de cette droite avec le cercle, on retrouve, d'après ce nouveau point de vue, tout ce qui avait été déterminé relativement au cercle osculateur, par des considérations différentes.

Contact des surfaces.

294. Lorsque deux surfaces ont un point commun (x', y', z'), et qu'en faisant varier x', y' de quantités infiniment petites quelconques dx', dy' la différence des va-

leurs de z correspondantes est un infiniment petit de l'ordre $n+1$, on dit que ces surfaces ont un contact de l'ordre n. L'ordre de cette différence est le même pour toutes les directions qui ne sont pas parallèles aux plans tangents à ces surfaces, au point que l'on considère : il résulte de là que deux surfaces auront un contact de premier ordre lorsque, pour une même valeur de x', y', on tirera les équations de l'une et de l'autre des mêmes valeurs pour z', $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$.

Elles auront un contact de second ordre lorsqu'elles donneront, en outre, les mêmes valeurs pour les coefficients différentiels partiels du second ordre

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2z'}{dx'\,dy'}, \quad \frac{d^2z'}{dy'^2}.$$

Enfin le contact sera de l'ordre n lorsque tous les coefficients différentiels seront les mêmes jusqu'à cet ordre inclusivement.

La surface osculatrice d'une espèce donnée se déterminera comme les courbes osculatrices, en établissant le plus grand nombre possible de dérivées communes entre les fonctions qui expriment la valeur de z dans son équation et celle de l'autre surface que l'on considère.

295. *Plan osculateur à une surface.* — Soit l'équation générale du plan

$$z = ax + by + c;$$

on aura, pour déterminer a, b, c, les équations

$$z' = ax' + by' + c, \quad \frac{dz'}{dx'} = a, \quad \frac{dz'}{dy'} = b,$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ étant tirées de l'équation de la surface donnée. L'é-

quation du plan osculateur sera donc

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Ce plan n'est donc autre chose que le plan tangent.

296. *Sphère osculatrice à une surface.* — L'équation la plus générale d'une sphère ne renfermant que quatre constantes arbitraires, on ne peut, en général, établir un contact du second ordre entre une sphère et une surface donnée, puisqu'il en résulterait six équations de condition. On ne pourra donc établir, entre ces surfaces, qu'un contact du premier ordre. Il restera une constante indéterminée dans l'équation de la sphère, et l'on pourra en profiter de manière à déterminer un contact du second ordre avec l'une des courbes que l'on peut tracer sur la surface; mais ces recherches nous écarteraient de notre objet.

297. *Contact des courbes et des surfaces.* — Si, à partir d'un point commun à une courbe et à une surface, on mène des parallèles à l'axe des z, on dira qu'il y a un contact de l'ordre n, lorsque la différence des valeurs correspondantes de z pour la courbe et la surface sera infiniment petite de l'ordre $n + 1$. On arrivera à des conditions du même genre que dans les cas précédents, et dans le détail desquelles nous n'entrerons pas.

298. *Développées.* — Si l'on considère une quelconque des normales en un point d'une courbe à double courbure, elle sera tangente à la surface polaire. Le plan normal mené par un point de la courbe, infiniment voisin du premier, coupera cette normale en un point qui sera commun à deux normales infiniment voisines. En faisant pour la seconde normale ce qui a été fait pour la première, et continuant

ainsi, on aura une suite indéfinie de normales à la courbe donnée, dont chacune rencontrera la suivante, et dont les points de contact avec la surface polaire seront infiniment rapprochés les uns des autres. Le point de contact des deux normales consécutives, se trouvant sur l'intersection des deux plans normaux, se rapproche indéfiniment de la surface polaire, qui est le lieu des limites des intersections des plans normaux consécutifs.

Cette suite de normales détermine donc un polygone dont les côtés sont infiniment petits, et dont la limite est une courbe tangente à toutes ces normales, et située sur la surface polaire : on l'appelle *développée* de la courbe donnée.

Comme on peut choisir une quelconque des normales à la courbe au point de départ, on obtiendra une infinité de développées aussi rapprochées que l'on voudra, et toutes seront sur la surface polaire, qui peut être considérée comme en étant le lieu géométrique. Relativement à ces courbes que nous avons nommées développées, la première prend le nom de *développante,* à cause d'une propriété analogue à celle que nous avons reconnue dans les courbes planes, et dont nous allons donner la démonstration.

Soient MN, M'N' (*fig.* 95) deux droites normales en M et M' à la courbe en question, N et N' leurs points de contact avec la développée ; nous allons prouver que la différence des longueurs M'N' et MN est égale à l'arc NN', à un infiniment petit près, du second ordre au moins. En effet, si aux points M et N on conçoit deux plans perpendiculaires à MN, la longueur M'P sera du second ordre, puisque la courbe M'M est tangente au plan ; de plus QP surpasse MN d'une quantité infiniment petite du second ordre. On peut donc prendre N'Q comme égale à la différence M'N' — MN, à une quantité près du second ordre. Mais la limite du rapport de N'Q à la corde NN' est l'unité, puisque les angles

Q et N du triangle rectiligne QNN′ tendent vers des angles droits. Donc N′Q diffère de l'arc N′N, tout au plus d'un infiniment petit du second ordre; donc, enfin, la différence de deux normales consécutives MN, M′N′ est égale à l'arc NN′, compris entre leurs points de contact avec la développée, plus ou moins une quantité infiniment petite par rapport à cet arc, et qui, par conséquent, peut être négligée sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports ou des sommes.

Il suit de là que, si en deux points quelconques de la développée on mène des tangentes terminées à la développante, la différence de leurs longueurs est rigoureusement égale à l'arc compris entre les points de contact.

Et l'on voit par là que la différence entre M′N′ — MN et l'arc NN′, qui devait être au moins du second ordre, était réellement égale à zéro.

Maintenant supposons un fil qui coïncide avec la développée à partir d'un point quelconque, où il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'à la développante. Si on le déroule en le laissant toujours tangent à la développée, il prendra successivement la position des diverses normales qui sont tangentes à cette courbe; et ces normales croissant précisément de la même longueur que le fil qui se déroule, ce sera toujours le même point de ce fil qui se trouvera sur la développante. Cette courbe sera donc décrite par l'extrémité du fil pris dans la première position. C'est cette propriété qui a fait donner aux deux courbes, l'une par rapport à l'autre, les noms de *développée* et de *développante*.

299. Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe. En effet, deux plans osculateurs consécutifs se coupent suivant une droite qui a pour limite la tangente, et ils

forment entre eux un angle infiniment petit du premier ordre. La distance du centre de courbure contenu dans le premier, au second plan, est donc un infiniment petit du premier ordre; or sa distance à la normale contenue dans ce second plan est plus grande que sa distance au plan : donc cette normale n'est pas tangente à la courbe qui passe par ces deux centres, puisqu'il faudrait pour cela que cette distance fût un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. Le lieu des centres de courbure n'est donc pas une des développées, lorsque la courbe que l'on considère n'est pas plane.

300. Les développées d'une courbe à double courbure jouissent de la propriété remarquable de se réduire à des lignes droites quand on développe la surface polaire sur un plan.

Pour le démontrer, nous considérerons un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe donnée, et ayant ses côtés égaux; ce qui revient à prendre l'arc pour variable indépendante. Sur les milieux de ces côtés, nous concevrons des plans perpendiculaires, dont les intersections formeront les arêtes de la surface développable qui, à la limite, devient la surface polaire.

Or, si du point du milieu d'un côté quelconque on trace une droite dans le plan normal, elle coupera l'arête commune à ce plan et au suivant, en un point qui, joint au milieu du côté suivant, donnera une normale à ce côté; et il est facile de voir que ces deux normales font des angles égaux avec l'arête que nous avons considérée.

Cette seconde normale prolongée coupera l'arête commune au second plan normal et au troisième, en un point qui, joint au milieu du troisième côté, formera une normale à ce côté, faisant avec la seconde arête le même angle que la normale précédente; et ainsi de suite indéfiniment.

Maintenant, si l'on développe sur un plan la surface qui renferme toutes ces arêtes, deux normales consécutives se rabattront l'une sur l'autre, puisqu'elles font le même angle avec l'arête sur laquelle elles se coupent, et le polygone infinitésimal, formé par les intersections de ces normales successives, aura tous ses côtés sur une même droite. Ce résultat, ayant lieu quelle que soit la petitesse des côtés de ce polygone, aura lieu pour la courbe limite, qui est une quelconque des développées de la courbe proposée.

Donc, dans le développement de la surface polaire sur un plan, toutes les développées de la courbe deviennent des lignes droites.

301. Dans le développement de la surface polaire, les côtés infiniment petits qui composent la développée ne changeant pas de longueur, un arc quelconque de cette courbe a la même longueur avant ou après le développement; et il en serait de même de toute autre ligne tracée sur cette surface. Donc le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface polaire est l'arc de la développée qui passe par ces deux points, puisque, devenant une ligne droite, il est plus court que tout autre après une transformation qui n'a pas changé les longueurs.

On peut encore remarquer que, si l'on suppose un fil appliqué sur le polygone formé par les normales successives que nous venons de considérer, et prolongé suivant un quelconque des côtés jusqu'au milieu du côté correspondant du premier polygone, inscrit dans la courbe donnée, et qu'ensuite on développe ce fil de manière qu'il soit successivement dans le prolongement de chacun des côtés du polygone sur lequel il est appliqué, son extrémité passera par tous les milieux des côtés de l'autre polygone. Donc, si l'on passe aux limites des polygones, on retrouvera la propriété démontrée précédemment par des considérations différentes.

302. *Équations des développées.* — Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée, l'équation de la surface polaire s'obtient en éliminant x', y', z' entre les deux équations de la courbe et les deux suivantes :

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz' = 0,$$
$$(x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' = ds'^2.$$

Si maintenant on considère un quelconque des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à ces équations, on passera de ce point au point voisin de la développée si la droite qui joint ces deux points est dans le prolongement de celle qui joint les points (x', y', z'), (x, y, z); ce qui aura lieu si les différentielles dx, dy, dz sont proportionnelles aux différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. On tirerait de là les deux équations

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y - y'}{z - z'}.$$

Mais une seule sera nécessaire, parce que les précédentes expriment que les points (x, y, z) ne cessent pas d'être sur la surface polaire. Une quelconque de ces deux équations étant jointe aux deux précédentes et à celles de la courbe donnée, on aura cinq équations entre lesquelles on éliminera x', y', z', et l'on obtiendra deux équations différentielles qui conviendront à l'une quelconque des développées.

Application des théories précédentes à l'hélice.

303. Si l'on désigne par a le rayon de la base du cylindre, et par m la tangente de l'inclinaison de l'hélice sur le plan de cette base, les équations des trois projections de cette courbe seront

$$x = a\cos\frac{z}{ma}, \quad y = a\sin\frac{z}{ma}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

L'axe des x passe par le point où l'hélice perce le plan de la base; et cette courbe, en s'élevant, tourne de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs.

Ces équations différentiées donnent

$$dx = -\frac{1}{m}\sin\frac{z}{ma}\,dz, \quad dy = \frac{1}{m}\cos\frac{z}{ma}\,dz, \quad ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\,dz,$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2a}\cos\frac{z}{ma}\,dz^2, \quad d^2y = -\frac{1}{m^2a}\sin\frac{z}{ma}\,dz^2, \quad d^2s = 0.$$

L'équation du plan osculateur devient alors, en prenant z pour variable indépendante,

$$z - z' = mx\sin\frac{z'}{ma} + my\cos\frac{z'}{ma}.$$

Ce plan fait avec le plan de la base un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ et la tangente m. Il est le même que celui de l'hélice avec le même plan.

L'équation du plan normal sera

$$m(z - z') = x\sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma}.$$

L'angle de contingence, dont l'expression générale est

$$\upsilon = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2},$$

devient, dans le cas actuel,

$$\upsilon = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}.$$

L'angle de deux plans osculateurs consécutifs est

$$\frac{dz}{a\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ou} \quad m\upsilon.$$

Le rayon du cercle osculateur, dont la valeur générale est $R = \frac{ds}{v}$, sera égal à $a(1 + m^2)$; sa grandeur est donc constante et surpasse de am^2 le rayon de la base. Pour connaître sa direction, il faut chercher l'intersection du plan normal et du plan osculateur. Les équations combinées donnent

$$z = z', \quad y = x \operatorname{tang} \frac{z'}{ma}.$$

Donc le rayon de courbure est constamment parallèle au plan de la base, et rencontre l'axe du cylindre. Le centre de courbure se meut donc sur un cylindre ayant même axe que le premier, et pour base un cercle dont le rayon est am^2. Il décrit sur ce cylindre une hélice dont le pas est le même que celui de l'hélice proposée.

On trouvera le même résultat en calculant les coordonnées du centre de courbure. Leurs valeurs sont

$$z = z', \quad y = -am^2 \sin \frac{z}{ma}, \quad x = -am^2 \cos \frac{z}{ma},$$

et l'on en déduit immédiatement les conséquences précédentes.

Déterminons maintenant les équations d'une arête quelconque de la surface polaire, c'est-à-dire de l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Ces équations sont les suivantes :

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma},$$

$$x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Cette droite est nécessairement perpendiculaire au plan osculateur, et on le vérifiera facilement au moyen de ses

équations. Comme d'ailleurs elle passe par le centre de courbure et qu'elle est perpendiculaire au rayon de courbure, elle est tangente au cylindre sur lequel se meut l'extrémité de ce rayon, et dont la base a pour rayon am^2. De plus, il est facile de reconnaître qu'elle est tangente à l'hélice décrite par cette extrémité. En effet, puisqu'elle est perpendiculaire au plan osculateur, elle fait avec le plan de la base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$: or l'hélice qui est le lieu des centres de courbure, et dont nous venons de donner les équations, est tracée sur le cylindre dont le rayon est am^2, et fait avec sa base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$. Donc l'arête de la surface polaire est tangente à cette hélice, et la surface polaire est l'hélicoïde développable dont cette hélice est l'arête de rebroussement.

Mais on sait que la sous-tangente d'une hélice sur le plan de sa base est égale à l'arc de cette base, depuis l'origine de l'hélice jusqu'à la projection du point de contact. Donc la trace de la surface polaire sur le plan (xy) est la développante de la base du cylindre dont le rayon est am^2.

304. Si l'on veut avoir l'équation de la surface polaire, il faut éliminer z' entre les deux équations

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma},$$

$$x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = - am^2.$$

Ajoutant les carrés des membres de ces deux équations, on obtient

$$m^2[(z - z')^2 + a^2 m^2] = x^2 + y^2;$$

substituant dans la seconde, on trouve l'équation cherchée,

qui est

$$x \cos\left(\frac{z}{ma} \pm \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4 a^2} - 1}\right)$$
$$+ y \sin\left(\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4 a^2} - 1}\right) = - am^2.$$

La trace de cette surface sur le plan (xy) a pour équation

$$x \cos \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4 a^2} - 1} \pm y \sin \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4 a^2} - 1} = - am^2.$$

Cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est am^2, et elle prend naissance au point de ce cercle situé sur l'axe des x, et du côté des x négatifs; ce qui s'accorde avec une des propositions précédemment démontrées.

Une hélice pouvant avoir ses deux courbures égales à celle d'une courbe quelconque en un de ses points, son osculation sera d'un ordre plus élevé que celle du cercle; elle donnerait donc une idée plus exacte de la courbe à laquelle on la comparerait. Les deux constantes m et a se détermineraient en égalant ces deux courbures à celles de la courbe donnée, au point considéré.

NOTES

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

NOTE I.

SUR LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. COMMENT ON LES INTRODUIT DANS LES DONNÉES DU CALCUL.

1. La résolution des équations du deuxième degré conduit quelquefois à extraire des racines carrées de quantités négatives. Ces sortes d'expressions ne représentent pas des nombres, soit positifs, soit négatifs; on les désigne sous le nom de *quantités imaginaires*. Nous n'avons pas pour objet d'examiner ici à quelles circonstances correspondent ces formes dans les questions proposées; nous nous bornerons à dire qu'en substituant ces expressions à l'inconnue, l'équation que l'on avait à résoudre devient identique, pourvu que les racines carrées des quantités négatives soient traitées d'après les règles ordinaires de l'Algèbre, et que l'on considère leur carré comme s'obtenant par la suppression du radical.

Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

on en tire les deux valeurs imaginaires

$$x = a \pm \sqrt{-b^2},$$

et l'on peut vérifier que la substitution de cette valeur dans l'équation la réduit à $0 = 0$.

Il en serait de même si, au lieu de $\sqrt{-b^2}$, on mettait $b\sqrt{-1}$, et c'est ce que l'on fait ordinairement, afin que la seule quantité imaginaire à considérer soit toujours $\sqrt{-1}$. Les valeurs de x se trouvent ainsi mises

sous la forme

$$x = a \pm b\sqrt{-1}.$$

Il semble d'abord que toutes les considérations auxquelles ces sortes d'expressions peuvent donner lieu soient relatives aux circonstances qui leur donnent naissance dans les questions dont elles présentent la solution; mais on a trouvé de très-grands avantages à les introduire dans les données mêmes de certains calculs, et c'est sous ce point de vue que nous allons les considérer brièvement.

Sans attacher aucune idée de quantité à l'expression $\sqrt{-1}$, nous convenons de la traiter de la même manière que si c'était un nombre dont les puissances successives seraient

$$\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\quad +1,\quad \sqrt{-1},\ldots,$$

les quatre premières se reproduisant indéfiniment dans le même ordre.

Rien ne s'oppose à ce que l'on fasse des calculs algébriques dans lesquels $\sqrt{-1}$ soit traité de cette manière; il ne s'agit que de savoir s'il y a quelque intérêt à le faire, et si de pareilles opérations peuvent offrir de nouvelles ressources à l'analyse. Il pourra quelquefois être plus commode de remplacer $\sqrt{-1}$ par une lettre dont les puissances se distinguent toutes les unes des autres, tandis que celles de $\sqrt{-1}$ se reproduisent périodiquement. En désignant $\sqrt{-1}$ par λ, nous entendrons que λ soit traité comme un facteur ordinaire, d'après toutes les règles démontrées dans le cas des quantités réelles; seulement, après tous les calculs effectués, on remplacera les puissances

$$\lambda,\quad \lambda^2,\quad \lambda^3,\quad \lambda^4,\quad \lambda^5,\quad \lambda^6,\ldots$$

par

$$\lambda,\quad -1,\quad -\lambda,\quad +1,\quad \lambda,\quad -1,\ldots.$$

2. Lorsque nous poserons une équation entre des quantités réelles et imaginaires, comme

$$A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1},$$

nous entendrons toujours que l'on sait d'avance que $A = A'$ et $B = B'$. Ces dernières équations ne seront jamais des conséquences de la première; c'est, au contraire, la première qui en est la conséquence, et nous n'attacherions aucun sens à cette équation si nous ne savions, indépendamment d'elle, que les parties réelles sont égales de part et d'autre, ainsi que les coefficients respectifs de $\sqrt{-1}$. Nous insistons

sur ce point, parce que la plupart des auteurs l'entendent de la manière inverse.

3. Ayant bien établi de quelle manière nous traiterons l'expression $\sqrt{-1}$, nous allons montrer, par un premier exemple, l'avantage que l'on peut avoir à l'introduire dans le calcul.

Considérons les deux expressions

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x, \quad \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

et multiplions-les entre elles, dans le sens que nous attachons ici à cette opération; nous trouverons

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + \sqrt{-1}(\sin x \cos y + \sin y \cos x),$$

ou

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y).$$

Nous pouvons donc poser

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

puisque nous avons prouvé d'avance que les parties réelles étaient respectivement égales, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$.

Et l'on conclut de là que pour diviser deux expressions de cette forme l'une par l'autre (en entendant par quotient une expression qui, multipliée par le diviseur suivant les règles convenues, reproduirait le dividende) il suffit de retrancher l'arc qui se trouve au diviseur de celui qui entre dans le dividende.

En multipliant le produit de ces premières expressions par une troisième $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, il suffira encore d'ajouter les arcs $x+y$ et y et z, ce qui donnera la nouvelle équation

$$\begin{aligned}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)\\ = \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z);\end{aligned}$$

et il est facile de voir que, quel que soit le nombre des facteurs de cette forme, leur produit effectué donnera toujours pour partie réelle le cosinus de la somme de tous les arcs, et pour coefficient de $\sqrt{-1}$ le sinus de cette même somme. On pourra donc poser une équation semblable à la dernière, en supposant un nombre m quelconque de facteurs, puisque les parties réelles sont démontrées égales, ainsi que les parties imaginaires.

En supposant le cas particulier où $x = y = z = \ldots$, on aurait la formule suivante, qui est due à Moivre :

$$(1) \qquad (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx;$$

il est donc prouvé que, si l'on forme la puissance m du binôme $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ d'après les règles ordinaires, la partie réelle sera égale à $\cos mx$, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ à $\sin mx$. Or le développement de la puissance m d'un binôme s'effectue au moyen d'une formule très-simple; on aura donc ainsi le développement général de $\cos mx$ et $\sin mx$, m étant un nombre entier quelconque. Ces formules sont

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 + \ldots,$$
$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots.$$

On peut observer que le développement de

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m$$

ne différerait de celui de

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$$

que par le signe des termes où se trouvent les puissances impaires de $\sqrt{-1}$, et que, par conséquent,

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx.$$

4. En entendant par racine $n^{ième}$ d'une expression imaginaire une autre expression qui, élevée à la puissance n, suivant le sens convenu, reproduirait la première, on voit que $\cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n}$ est une racine $n^{ième}$ de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, puisque nous avons prouvé que, pour élever une semblable expression à la puissance $n^{ième}$, il suffit de multiplier l'arc par n. On a donc

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n};$$

et si l'on élève les deux membres à la puissance p, il vient

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x,$$

ce qui montre que l'équation (1) est vraie quand m est un nombre fractionnaire quelconque $\frac{p}{n}$, en entendant seulement par là que $\cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x$, élevé à la puissance n, donnerait la puissance p de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, et que, par conséquent, il est une des racines $n^{\text{èmes}}$ de cette puissance p.

L'équation (1) est encore vraie si m est égal à un nombre négatif $-n$. En effet,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-m} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n} = \frac{1}{(\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx)};$$

or diviser par $\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$, c'est trouver une expression qui, multipliée par ce diviseur d'après les règles communes, donne pour produit le dividende; ce quotient est donc $\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx$.

Donc

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-n} = \cos(-nx) + \sqrt{-1}\sin(-nx).$$

La formule (1) est donc vraie, quelque valeur réelle qu'ait m, en observant toutefois que, si la puissance m est susceptible de plusieurs valeurs, nous avons seulement prouvé ici que le second membre en est une.

5. Nous allons résoudre maintenant la question inverse, qui consiste à développer $\cos^m x$ et $\sin^m x$ au moyen des cosinus et sinus des arcs multiples de x, m étant un nombre entier.

Pour cela nous poserons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u,$$

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = v,$$

d'où

$$2\cos x = u + v,$$

et, par suite,

$$2^m \cos^m x = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots + muv^{m-1} + v^m.$$

Observant maintenant que $uv = 1$, et que $u^k + v^k = 2\cos kx$, on aura

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots.$$

Si m est pair, le terme qui se trouve au milieu du développement de $(u+v)^m$ se réduit à $\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$ et forme le dernier terme du développement de $2^m\cos^m x$. Si m est impair, les deux termes du milieu sont en u et v de la forme

$$u^{\frac{m+1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m+1}{2}},$$

expressions qui se réduisent respectivement à u et v, puisque $uv =$ Le dernier terme du développement de $2^m\cos^m x$ est alors

$$2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos x.$$

On développera maintenant $\sin^m x$ en observant que

$$2\sqrt{-1}\sin x = u - v,$$

d'où

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{m-2}v^2\ldots;$$

ce qui signifie toujours que les parties réelles sont les mêmes de part et d'autre, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$, s'il y reste, ce qui n'arrivera que si m est impair.

Supposons d'abord m pair : les termes à égale distance des extrêmes seront de même signe, et, en les réunissant deux à deux, on trouvera

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m x = 2\cos mx - 2m\cos(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}},$$

le signe + correspondant à $\frac{m}{2}$ pair, et le signe − à $\frac{m}{2}$ impair. Si m est impair, le développement pourra se mettre sous la forme

$$u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \ldots,$$

en remplaçant partout uv par 1. Si donc on observe que

$$u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\sin kx,$$

on aura, en ne prenant que les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$2^m(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin^m x = 2\sin mx - 2m\sin(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm 2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin x,$$

le signe + ayant lieu quand $\frac{m-1}{2}$ sera pair, et le signe − quand il sera impair.

6. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage que l'emploi de $\sqrt{-1}$ a procuré dans la recherche des développements de $\cos^m x$ et $\sin^m x$.

Nous avons remplacé $2\cos x$ par

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x + \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

qui lui est identique, puisque les deux termes

$$\sqrt{-1}\sin x \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}\sin x,$$

traités comme s'ils représentaient des nombres, se détruisent. Et même si, au lieu de $\sqrt{-1}$, on met une quantité λ indéterminée, on pourra remplacer $2\cos x$ par

$$(\cos x + \lambda \sin x) + (\cos x - \lambda \sin x);$$

et quelque calcul que l'on effectue sur cette expression, le résultat sera nécessairement indépendant de λ, et les puissances d'un même degré quelconque de cette lettre auront zéro pour coefficient. Or prendre seulement les termes réels du résultat, c'est négliger les puissances impaires de λ et ne conserver que les puissances paires, ce qui est permis, puisque les coefficients de chaque puissance de λ sont nuls. Mais quand on remplacera λ^2 par 1, il pourra y avoir des réductions entre les termes correspondant à des puissances différentes de λ, et notamment avec ceux qui ne renfermaient pas λ, et qui sont précisément ceux que l'on trouverait en ne transformant pas d'abord $2\cos x$. Il peut donc résulter de là de nouvelles combinaisons qui, sans altérer la valeur du résultat, lui donnent une forme plus commode. Cela revient à ajouter au résultat des quantités qui se détruisent; mais, à chaque instant, dans l'Algèbre, on voit de pareils artifices faciliter les transformations; et ce qui fait que, dans le cas actuel, on en retire réellement un très-grand avantage, c'est que les deux binômes dont la somme remplace $2\cos x$ sont tels, que les puissances de chacun d'eux s'effectuent immédiatement par la multiplication de l'arc, et que le produit des puissances semblables de l'un et l'autre est l'unité. Il résulte de là que la puissance $m^{ième}$ de $\cos x$ se trouve immédiatement exprimée au moyen des cosinus des arcs multiples de x; et il en est de même pour $\sin^m x$.

Usage des lignes trigonométriques pour l'extraction des racines des quantités réelles ou imaginaires.

7. Les racines de degré m d'un nombre réel positif ou négatif $\pm A$ sont les racines de l'équation

$$y^m \mp A = 0;$$

ces racines peuvent se ramener à celles de l'unité, posant $y = ax$, a désignant la racine $n^{ième}$ arithmétique du nombre A; l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante :

$$x^m \mp 1 = 0,$$

dont nous allons déterminer les m racines, qui sont toutes inégales, puisqu'il n'y a pas de commun diviseur entre le premier membre et sa dérivée. Soit d'abord

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad x^m = 1.$$

Nous pouvons représenter 1 par une expression de la forme

$$\cos z + \sqrt{-1}\sin z,$$

dont nous savons qu'il est facile d'extraire la racine. Il suffit de poser $z = 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; et l'on aura identiquement

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1}\sin 2n\pi.$$

Donc l'expression

$$(1) \qquad \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

donne les racines $m^{\text{èmes}}$ de 1, et, par conséquent, des valeurs de x pour toute valeur entière de n.

Or on reconnaît immédiatement que l'expression (1) ne change pas quand on augmente ou qu'on diminue n de m ou d'un multiple entier quelconque de m. Il suffit donc, dans la série indéfinie des nombres entiers positifs ou négatifs, d'en prendre m consécutifs quelconques; ils donneront toutes les valeurs de l'expression (1). De plus, il est facile de voir qu'elles seront toutes différentes, parce que deux de ces arcs ne peuvent avoir le même sinus et le même cosinus; donc toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

seront données par la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m},$$

dans laquelle on donnera à n les valeurs 0, 1, 2,..., jusqu'à ce que l'on ait m valeurs pour le second membre; car c'est comme si l'on donnait à n m valeurs consécutives, les unes positives, les autres négatives.

Si m est pair, on posera $m = 2k$, et il viendra

$$x = \cos\frac{n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{k}.$$

Il faudra alors donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$. Les deux extrêmes donnent $x = 1$, $x = -1$, et toutes les autres valeurs de x sont imaginaires, conjuguées et réciproques deux à deux.

Si l'on a

$$m = 2k + 1,$$

il faudra donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$.

La première donne $x = 1$; les autres sont toutes imaginaires, conjuguées et réciproques deux à deux.

8. Soit maintenant

$$x^m + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^m = -1, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{-1}.$$

On peut encore donner à -1 la forme $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, en posant $z = (2n+1)\pi$. On aura donc des valeurs de x par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m};$$

il suffira de prendre m valeurs consécutives de n, parce qu'elles correspondront toutes à des sinus ou cosinus différents, et toutes les autres valeurs de n fourniront les mêmes valeurs pour x. Toutes les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

sont donc données par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

en donnant à n des valeurs positives depuis zéro, jusqu'à ce qu'il en résulte m valeurs pour le second membre. Si $m = 2k$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k-1$; celles de x seront toutes imaginaires, conjuguées et réciproques. Si $m = 2k+1$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k$, la dernière donnera $x = -1$; toutes les autres valeurs de x seront conjuguées et réciproques.

Les racines de ± 1 étant connues, on aura celles de $\pm A$ en les multipliant par la racine arithmétique de A.

Les facteurs réels du premier et du second degré, dans lesquels peuvent se décomposer les binômes $x^m - 1$ et $x^m + 1$, peuvent être représentés par une construction fort simple, qui dépend de la divi-

sion du cercle en parties égales, et qui a été donnée par le géomètre anglais Cotes.

9. Cherchons maintenant à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'une expression de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

en déterminant ρ et z par les deux équations

$$\rho\cos z = a, \quad \rho\sin z = b;$$

d'où

$$\rho = \pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos z = \frac{a}{\rho}, \quad \sin z = \frac{b}{\rho}.$$

Pour plus de commodité, nous ne prendrons que la valeur positive de ρ. Désignons par φ le plus petit arc positif ayant pour cosinus $\frac{a}{\rho}$ et pour sinus $\frac{b}{\rho}$; on pourra, sans que ces lignes changent, l'augmenter d'un nombre quelconque de circonférences, et l'on aura

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\varphi + 2n\pi)].$$

On aura des racines $m^{\text{ièmes}}$ de cette expression en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ, et la multipliant par la racine du second facteur, que l'on obtiendra par la division de l'arc; on a ainsi

$$\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right).$$

Il suffit évidemment de donner à n m valeurs consécutives, positives ou négatives; toutes les autres donneraient les mêmes résultats. De plus, ces m valeurs de n donnent des valeurs différentes pour les sinus ou cosinus de $\frac{\varphi + 2n\pi}{m}$; donc, en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$, toutes les valeurs de la racine cherchée seront données par la formule

$$\sqrt[m]{a \pm b\sqrt{-1}} = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right),$$

les signes supérieurs de $\sqrt{-1}$ se correspondant, ainsi que les inférieurs.

10. La transformation de

$$a \pm b\sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$$

ramène toutes les opérations sur les quantités imaginaires aux opérations sur les expressions de la forme

$$\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

et nous avons vu que celles-ci se ramenaient toutes aux opérations immédiatement inférieures sur les arcs, propriétés tout à fait analogues à celles des exponentielles.

Cette analogie sera encore augmentée par les considérations suivantes.

Représentation des sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires.

11. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$, et qu'on représente la série résultante par $e^{x\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1) \qquad e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

Si l'on convient de même de désigner par $e^{-x\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $-x\sqrt{-1}$ à x dans le développement de e^x, on aura

$$(2) \qquad e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots.$$

Ces équations peuvent être écrites comme il suit :

$$(3) \qquad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

et dans toutes ces formules il ne faut pas oublier que $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ n'ont aucun sens comme exponentielles : elles ne représentent autre chose que les séries qu'on obtient en substituant $+x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x, et traitant $\sqrt{-1}$ de la manière convenue.

12. Il est facile de démontrer que ces exponentielles imaginaires doivent être traitées d'après les mêmes règles que si les exposants étaient réels.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de multiplier $e^{x\sqrt{-1}}$ par $e^{y\sqrt{-1}}$, en entendant toujours par là les séries qui représentent ces expressions, et qui peuvent être remplacées par $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ et $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, dont le produit est $\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$. Cette dernière expression est représentée, dans le même sens, par $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$; donc on peut poser

$$e^{x\sqrt{-1}}e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

La règle des exposants réels s'observe donc dans la multiplication des exponentielles imaginaires, et, par suite, dans leur division, dans leur élévation à des puissances, et dans l'extraction de leurs racines.

On pourrait encore déduire cette proposition de ce que, e^{x+y} étant égal à $e^x e^y$ pour toutes les valeurs réelles de x et y, on a identiquement

$$1 + \frac{(x+y)}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots\right).$$

L'identité ne sera pas troublée en changeant dans les deux membres x en $x\sqrt{-1}$, ou y en $y\sqrt{-1}$; et l'on trouvera toujours les mêmes termes réels ou imaginaires avec les mêmes signes : d'où l'on conclut

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}e^{y\sqrt{-1}},$$

ou encore, en supposant qu'on change seulement y en $y\sqrt{-1}$,

$$e^{(x+y\sqrt{-1})} = e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right).$$

13. On est convenu de donner le nom de logarithmes aux exposants imaginaires, comme aux exposants réels. Ainsi $x + y\sqrt{-1}$ est le loga-

rithme de $e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$; et pour avoir le logarithme d'une expression de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, on posera d'abord

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x) = e^{l\rho \pm x\sqrt{-1}} = e^{l\rho \pm (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

φ étant la plus petite valeur positive de x, et l'on aura

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(a^2 + b^2) \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

Si $b = 0$, on a, pour toutes les valeurs du logarithme de a,

$$la \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

L'arc φ est égal à 0 si a est positif, et égal à π si a est négatif. On a donc, en entendant par la le logarithme arithmétique du nombre a,

$$l(+a) = la \pm 2n\pi\sqrt{-1},$$
$$l(-a) = la \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Cette dernière expression ne donne aucune valeur réelle; la première en donne une seule.

En faisant $a = 1$, on trouve

$$l1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}, \quad l(-1) = \pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

14. On peut exprimer, au moyen des formules précédentes, les racines des équations de la forme

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

En effet, on en tire d'abord

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ou $= 0$, les valeurs de x seront les racines de quantités réelles, et nous avons vu comment on pouvait les exprimer au moyen des lignes trigonométriques.

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$, les valeurs de x^m seront de la forme

$a \pm b\sqrt{-1}$, et l'on en extraira les racines $m^{\text{ièmes}}$, comme nous l'avons indiqué en dernier lieu.

Si l'on forme, d'après les valeurs de ces racines, les facteurs réels de $x^{2m} + px^m + q$, on reconnaît immédiatement une construction simple qui les représente géométriquement, et qui repose sur la division du cercle en parties égales. Nous nous dispenserons d'entrer dans ces détails.

Nous terminerons en faisant remarquer que les expressions imaginaires sont souvent un moyen de généralisation qui ne saurait être remplacé par aucun autre. Ainsi la décomposition si utile des polynômes algébriques en facteurs du premier degré n'est possible que par l'emploi des imaginaires.

NOTE II.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

15. Toute fraction rationnelle de x peut être considérée comme composée d'une partie entière par rapport à x et d'une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur.

Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ cette fraction. Nous nous proposons de la décomposer en fractions plus simples, ayant pour dénominateurs les facteurs premiers de $f(x)$; ce qui exige d'abord que l'on cherche les racines de ce polynôme. Supposons-les déterminées, et considérons d'abord le cas où elles seraient toutes inégales; désignons-les par $a, b, c, \ldots, l$. Soient A, B, C, ..., L des constantes indéterminées, et proposons-nous de satisfaire à l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(1) \qquad F(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + L\frac{f(x)}{x-l}.$$

Toutes ces divisions indiquées dans le second membre donnent des quotients entiers, et les indéterminées sont en même nombre que les différents ordres de termes, relativement à x : on pourrait donc trouver leurs valeurs en égalant, suivant la méthode ordinaire, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Mais il existe dans le cas actuel un moyen beaucoup plus simple. En effet, si l'on fait $x = a$, l'identité subsistera toujours, et tous les termes du second membre disparaîtront, excepté $A\frac{f(x)}{x-a}$. Pour savoir ce qu'il devient, on pourrait faire d'abord la division par $x - a$, puis faire $x = a$ dans le quotient entier; mais il vaut mieux traiter la fraction

$\frac{f(x)}{x-a}$ d'après la règle relative aux fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$, et l'on voit alors qu'elle se réduit à $f'(a)$.

Ainsi l'hypothèse $x = a$ réduit l'identité de la formule suivante :

$$F(a) = Af'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)},$$

et comme $f'(a)$ n'est pas nul, puisque a n'est pas une racine multiple, il est toujours possible de déterminer A de manière que l'équation (1) ait lieu pour $x = a$.

On voit de même qu'en prenant

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

l'équation (1) sera satisfaite par $x = b$, $x = c, \ldots, x = l$. Il reste à en déduire la preuve de l'identité (1) ; car il est très-important d'observer, en général, qu'il ne suffit pas d'avoir trouvé des valeurs pour les coefficients indéterminés, lorsque l'on n'a pas prouvé d'avance la possibilité du développement. Or on sait que, quand deux fonctions entières de x sont égales pour un nombre de valeurs particulières de x, supérieur au degré du terme le plus élevé, elles sont égales, terme pour terme. Donc les deux membres de l'équation (1) sont rendus identiques par les valeurs trouvées pour A, B, C,..., L, puisqu'ils sont égaux pour les diverses valeurs a, b, c,..., l, dont le nombre surpasse d'une unité le degré du terme le plus élevé.

16. S'il y avait des racines imaginaires, rien ne serait changé dans les raisonnements précédents. Les constantes qui se rapporteraient à deux racines conjuguées ne différeraient l'une de l'autre que par le signe de $\sqrt{-1}$, et les deux fractions seraient de la forme

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{M + N\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut faire disparaître les imaginaires, on effectuera la somme de ces deux fractions, qui se réduira à

$$\frac{2M(x-\alpha) + 2\beta N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

On agirait de même pour toutes les autres racines imaginaires.

17. Supposons maintenant que l'équation

$$f(x) = 0$$

ait à la fois des racines inégales et des racines égales; soit a l'une quelconque de ces dernières, et

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

le polynôme $\varphi(x)$ n'admettant plus le facteur $(x-a)$; posons

$$(1)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = {} & A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \ldots \\ & + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x) + P(x-a)^m. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des coefficients du polynôme P, ajouté au nombre des constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, est égal au nombre des termes de cette équation, et il s'agit de les déterminer de manière à la rendre identique. Si l'on y fait $x = a$, on obtient

$$F(a) = A\varphi(a),$$

d'où l'on tirera la valeur de A. Différentiant l'équation (2) et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a).$$

Différentiant successivement la même équation et faisant ensuite $x = a$, on introduira à chaque fois un nouveau coefficient, et l'on pourra ainsi, au moyen de $m-1$ différentiations, déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Les termes provenant de $P(x-a)^m$ disparaîtront tous par l'hypothèse $x = a$.

Cherchons la formule générale qui représente toutes ces équations successives, et, pour cela, différentions p fois l'équation (2).

Pour savoir ce qui reste de chacun des termes quand on fera $x = a$ après la différentiation, considérons le terme général $A_n(x-a)^n\varphi(x)$. On trouvera sa dérivée de l'ordre p au moyen de la formule connue

$$\frac{d^p(QR)}{dx^p} = Q^pR + pQ^{p-1}R' + \frac{p(p-1)}{1.2}Q^{p-2}R'' + \ldots + QR^p,$$

dans laquelle les exposants de Q et R sont des indices de différentiation. On aura ainsi

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^p[(x-a)^n\varphi(x)]}{dx^p} &= n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p}\varphi(x)\\ &+\frac{p}{1}n(n-1)\ldots(n-p+2)(x-a)^{n-p+1}\varphi'(x)\\ &+\frac{p(p-1)}{1.2}n(n-1)\ldots(n-p+3)\\ &\times(x-a)^{n-p+3}\varphi''(x)+\ldots(x-a)^n\varphi^p(x).\end{aligned}\right.$$

Si p est plus grand que n, les premiers termes auront des exposants négatifs, et on devra les omettre, parce que leurs coefficients seront zéro; cela tient à ce que, quand $(x-a)$ sera affecté de l'exposant zéro, il donnera zéro pour dérivée.

Voyons maintenant ce que devient le second membre de l'équation (3) quand on y fait $x=a$. Si l'on a $p<n$, il se réduit à zéro. Si l'on a $p=n$, il se réduit à son premier terme $n(n-1)\ldots 2.1\varphi(a)$. Enfin si l'on a $p<n$, il faudra se borner à prendre le terme qui en a $p-n$ avant lui, parce qu'il aura zéro pour exposant; les précédents auraient donc un exposant négatif et doivent être omis, comme nous l'avons dit; et les suivants deviendront nuls quand on fera $x=a$. Le second membre de l'équation (3) se réduit donc alors à

$$p(p-1)\ldots(p-n+1)\varphi^{p-n}(a).$$

Donc l'équation (2), différentiée p fois en supposant $p<m$, donnera, pour $x=a$, en observant qu'il faut s'arrêter à $n=p$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}F^p(a) &= A\varphi^p(a)+pA_1\varphi^{p-1}(a)+p(p-1)A_2\varphi^{p-2}(a)+\ldots\\ &+p(p-1)\ldots(p-n+1)A_n\varphi^{p-n}(a)+\ldots\\ &+p(p-1)\ldots 2.1A_p\varphi(a).\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation générale qui, en donnant à p toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $m-1$ inclusivement, fournira m équations, d'où l'on déduira successivement chacune des quantités $A, A_1\ldots, A_{m-1}$. Ces équations sont les suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&F(a)=A\varphi(a),\\ &F'(a)=A\varphi'(a)+A_1(a),\\ &F''(a)=A\varphi''(a)+2A_1\varphi'(a)+2.1A_2\varphi(a),\\ &F'''(a)=A\varphi'''(a)+3A_1\varphi''(a)+3.2A_2\varphi'(a)+3.2.1A_3\varphi(a),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &F^{m-1}(a)=A\varphi^{m-1}(a)+(m-1)A_1\varphi^{m-2}(a)+(m-1)(m-2)A_2\varphi^{m-3}(a)+\ldots\\ &\qquad+(m-1)(m-2)\ldots 2.1A_{m-1}\varphi'(a).\end{aligned}\right.$$

La première équation donne la valeur de A, et ce sera la seule inconnue si $m = 1$; la deuxième fait ensuite connaître immédiatement A_1, la troisième A_2, et ainsi de suite jusqu'à A_{m-1} : et il n'y aura jamais impossibilité, parce que, le coefficient du dernier terme n'étant jamais zéro, on trouvera toujours une valeur finie pour chaque inconnue.

Il reste à prouver que, réciproquement, si l'on prend pour A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ les valeurs ainsi déterminées, on aura satisfait à l'identité (2). En effet, ces valeurs sont tirées des équations (5), qui expriment que l'hypothèse $x = a$ annule le polynôme suivant et ses $m - 1$ premières dérivées,

$$F(x) - A\varphi(x) - A_1(x-a)\varphi(x) - A_2(x-a)^2\varphi(x) \ldots - A_{m-1}(x-a(^{m-1}\varphi(x).$$

Donc, d'après un théorème connu, ce polynôme est divisible par $(x-a)^m$ et peut être mis sous la forme $P(x-a)^m$, P étant un polynôme entier qu'il sera facile de connaître. Donc les identités (2) et (1) seront satisfaites.

Cela posé, on pourra traiter d'une manière semblable la fraction $\frac{P}{\varphi(x)}$ relativement à une autre racine multiple, si elle en renferme, et continuer ainsi jusqu'à la dernière. La fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sera donc décomposee en fractions dont les numérateurs seront indépendants de x, et dont les dénominateurs ne renfermeront respectivement qu'un seul facteur premier de $f(x)$, élevé à une puissance égale ou inférieure au degré de multiplicité de ce facteur.

De plus, il est facile de reconnaître que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière ; car si les constantes relatives à la racine a, par exemple, étaient susceptibles de plusieurs valeurs, on devrait les trouver toutes, soit que le calcul fût fait d'abord pour cette racine, ou pour toute autre. Or nous avons reconnu que les constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ne pouvaient avoir chacune plus d'une valeur. Donc il n'est possible de décomposer la fraction que d'une seule manière en fractions simples de la forme proposée.

On conclut de là que, pour les racines autres que la première a, il ne sera pas nécessaire de recommencer les calculs sur le polynôme P et les suivants. Il suffira de changer dans les équations (5) les quantités m, a et $\varphi(x)$ en celles qui se rapporteront à toute autre racine de l'équation $f(x) = 0$; car c'est ce que l'on obtiendrait en commençant successivement par chacune d'elles.

18. Les calculs précédents exigent que l'on forme le polynôme $\varphi(x)$

qui est le quotient de la division de $f(x)$ par $(x-a)^m$. On peut se dispenser de faire cette opération, et exprimer $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$,..., $\varphi^{m-1}(a)$, au moyen des dérivées de la fonction $f(x)$ elle-même : on les substituera ensuite dans l'équation générale (4), de laquelle se tirent toutes les équations (5). Or, si l'on différentie les deux membres de l'équation

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

ils se réduiront à zéro par l'hypothèse $x = a$, si le nombre des différentiations est inférieur à m. Supposons-le donc égal à $m+p$, p étant un nombre entier et positif quelconque.

Il est inutile de répéter ici ce qui a été dit au sujet de l'équation (3), et l'on aura, en faisant $x = a$ dans les dérivées de l'ordre $m+p$,

$$f^{m+p}(a) = (m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)\varphi^p(a);$$

d'où

$$\varphi^p(a) = \frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)}.$$

L'équation (4) devient, par là,

$$\begin{aligned} F^p(a) = A\frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)} + A_1\frac{f^{m+p-1}(a)}{(m+p-1)\ldots(p+1)} \\ + A_2\frac{f^{m+p-2}(a)}{(m+p-2)\ldots(p+1)} + \ldots + A_p\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots(p+1)}. \end{aligned}$$

Si l'on donne à p toutes les valeurs depuis o jusqu'à $m-1$, on aura, pour déterminer A, A_1,..., A_{m-1}, les m équations suivantes :

$$F(a) = A\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots 2.1},$$

$$F'(a) = A\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots 2} + A_1\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots 2},$$

$$F''(a) = A\frac{f^{m+2}(a)}{(m+2)\ldots 3} + A_1\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots 3} + A_2\frac{f^m(a)}{m\ldots 3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{m-1}(a) = A\frac{f^{2m-1}(a)}{(2m-1)\ldots m} + A_1\frac{f^{2m-2}(a)}{(2m-2)\ldots m} + \ldots + A_{m-1}\frac{f^m(a)}{m}.$$

19. Les calculs précédents peuvent s'appliquer aux racines imaginaires égales, aussi bien qu'aux racines réelles; mais les réductions

entre les termes homologues relatifs aux racines conjuguées ne donnent pas immédiatement des résultats aussi simples que le mode de décomposition que nous allons faire connaître.

Soient $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ deux racines multiples de l'ordre m de l'équation $f(x) = 0$, de sorte que l'on ait

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\varphi(x).$$

On posera

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}x + B_{m-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou

$$F(x) = (Ax+B)\varphi(x) + (A_1 x + B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x) + \ldots$$
$$+ (A_{m-1}x + B_{m-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}\varphi(x) + P[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m.$$

Le nombre des coefficients indéterminés est égal au nombre des termes qu'il faut égaler de part et d'autre, en ayant égard à ceux du polynôme P. Mais nous nous proposons ici de déterminer seulement A, B, A_1, B_1, ..., A_{m-1}, B_{m-1}. Or, si l'on fait $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ dans la dernière équation et dans ses dérivées successives, chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres, à cause de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$; et de plus il s'introduira dans chaque nouvelle équation deux nouveaux coefficients inconnus. Ainsi la première déterminera A et B, la seconde A_1 et B_1, et la $m^{ième}$ A_{m-1} et B_{m-1}.

Ces mêmes formules s'appliqueraient aux autres racines imaginaires égales, en changeant convenablement

$$\alpha, \quad \beta, \quad m, \quad \varphi(x).$$

On pourrait encore, comme dans le cas des racines réelles égales, se dispenser de former le quotient $\varphi(x)$, et faire dépendre sa valeur et celle de ses dérivées, pour $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, des valeurs que prennent, dans la même hypothèse, les dérivées de $f(x)$; mais les formules sont moins simples que dans le cas précédent.

NOTE III.

RÈGLES DE CONVERGENCE DES SÉRIES.

On appelle *série* une suite de termes positifs ou négatifs dont le nombre est infini.

On dit qu'une série est *convergente* lorsque la somme des n premiers termes tend vers une limite déterminée, à mesure que n augmente indéfiniment. Elle est *divergente* dans le cas contraire.

20. Le développement en séries peut être très-utile pour la détermination approchée des grandeurs, soit constantes, soit variables; mais on ne peut évidemment, dans des calculs soit numériques, soit algébriques, remplacer une quantité quelconque par une série, que lorsque celle-ci a pour limite cette quantité même. Il est donc nécessaire de connaître quelques caractères d'après lesquels on puisse juger si une série donnée est ou n'est pas convergente. Nous allons exposer les règles les plus simples qui ont été données à cet effet, et dont quelques-unes sont tirées du *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

Nous remarquerons d'abord que la somme des termes d'une série ne peut tendre vers une limite déterminée, si la grandeur des termes ne tend pas vers zéro. Cela est tout à fait évident, lorsque les termes sont tous de même signe, parce qu'alors leur somme croîtrait indéfiniment avec leur nombre; mais, lors même qu'ils seraient de signes différents, les sommes successives ne pourraient avoir une différence moindre que toute quantité donnée avec une grandeur déterminée, puisque deux sommes consécutives auraient toujours entre elles une différence finie, qui serait le terme auquel s'arrête la dernière.

Il est donc indispensable, pour qu'une série soit convergente, que ses termes aient pour limite zéro; mais cela n'est pas suffisant, comme nous aurons occasion de le reconnaître. Il faut toujours s'assurer qu'après avoir dépassé un assez grand nombre de termes, à partir du commencement, et s'arrêtant à un terme quelconque au delà, la somme des suivants, quelque nombre que l'on en prenne, est au-dessous d'une quantité, qui peut être supposée aussi petite que l'on voudra.

Il est encore bon de remarquer que, si une série est convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, elle le sera ensuite quand on multipliera tous ses termes par un même nombre quelconque, ou même par des nombres différents positifs ou négatifs, pourvu qu'ils restent finis. En effet, puisque la somme arithmétique des termes de la première série, qui sont au delà d'un certain rang, peut être supposée moindre que toute grandeur donnée, il en sera de même dans la seconde; car la somme de ses termes au delà du même rang, lors même qu'on les prendrait tous avec le même signe, sera moindre que la somme des correspondants de la première, multipliée par le plus grand des facteurs introduits, qui est supposé fini.

21. La série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

offre un exemple d'une suite indéfinie de termes décroissant indéfiniment, et dont la somme n'a pas de limite. En effet, faisons la somme des n termes qui suivent $\frac{1}{n}$, ou

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n};$$

elle est évidemment plus grande que

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{2n}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{1}{2}.$$

Donc, à quelque terme que l'on s'arrête dans la série en question, on peut toujours en prendre un assez grand nombre à la suite, pour obtenir un nombre plus grand que $\frac{1}{2}$; et, par conséquent, la somme des termes de cette série ne tend pas vers une limite, et peut croître indéfiniment.

Séries dont tous les termes sont positifs.

22. Premier théorème. — *Une série est convergente, lorsque le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite plus petite que l'unité, à mesure que le nombre qui exprime son rang devient de plus en plus grand. Elle est divergente lorsque cette limite est plus grande que l'unité.*

Soit la série

$$u_0+u_1+u_2\ldots+u_{n+1}+\ldots,$$

et supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite k plus petite que l'unité. Soit α un nombre déterminé quelconque, compris entre 1 et k; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par être constamment inférieur à α, quand n aura dépassé une certaine valeur. En considérant la série à partir d'un terme quelconque, au delà de cette valeur, on aura cette suite indéfinie d'inégalités

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \alpha, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \alpha, \ldots,$$

d'où résulte

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad a_{n+2} < \alpha_2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha_3 u_n, \ldots.$$

Tous les termes, à partir de u_{n+1}, sont donc inférieurs à ceux de la suite

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n,$$

qui est une progression géométrique décroissante, et qui a, par conséquent, une limite. Donc aussi la série proposée a une limite, puisque la somme de ces termes, tous positifs, va constamment en augmentant, et reste néanmoins au-dessous d'une certaine quantité finie.

Il est même facile d'apprécier une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. En effet on a

$$u_n + u_{n+1} + \ldots < u_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots);$$

donc

$$\lim (u_n + u_{n+1} + \ldots) < \frac{u_n}{1 - \alpha}.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme u_{n-1} inclusivement est donc moindre que $\frac{u_n}{1-\alpha}$. Or u_n est une quantité connue, qui peut être aussi petite que l'on voudra, puisque les termes de la série, étant au-dessous de ceux d'une progression géométrique décroissante, peuvent devenir moindres que toute quantité donnée : quant à α, il sera en général assez facile d'en avoir une valeur suffisamment approchée.

Il est évident que notre raisonnement ne suppose pas que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait réellement une limite, mais seulement qu'il finisse par être toujours au-dessous d'un nombre déterminé, plus petit que l'unité. Nous nous sommes exprimé ainsi, parce que ce n'est que dans des cas très-exceptionnels que cette fonction de n a une valeur indéterminée lorsque n

augmente indéfiniment. Cette remarque s'appliquera à tout ce qui suit.

23. Si, au contraire, on avait $k > 1$, on finirait par avoir $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, α étant compris entre 1 et k, et, par conséquent, plus grand que l'unité. On aurait alors

$$u_{n+1} > \alpha u_n, \quad u_{n+2} > \alpha^2 u_n, \ldots.$$

Les termes de la série proposée croîtraient donc indéfiniment, et, par conséquent, à plus forte raison, la série n'aurait pas de limite. Elle serait donc divergente.

Si l'on avait $k = 1$, on ne pourrait rien affirmer; et, dans ce cas, il peut arriver qu'une série soit convergente, ou qu'elle soit divergente.

24. Toutefois il est bon de remarquer que, si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être toujours au-dessus de sa limite 1, la série est divergente; car alors les termes finissent par aller toujours en croissant; et, comme ils sont tous positifs, leur somme peut devenir plus grande que toute quantité donnée, puisqu'il en serait ainsi lors même qu'ils conserveraient une valeur constante, quelque petite qu'elle fût.

25. Si la série est ordonnée par rapport aux puissances d'une variable x, et que l'on ait généralement $u_n = A_n x^n$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ deviendra $\frac{A_{n+1}}{A_n} x$; et, en désignant par k la limite du rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, la condition de convergence sera

$$kx < 1;$$

d'où l'on tire

$$x < \frac{1}{k}.$$

Ainsi la série sera convergente tant que x sera plus petit que $\frac{1}{k}$, et divergente quand il sera plus grand que $\frac{1}{k}$. Il pourra y avoir incertitude quand x sera égal à $\frac{1}{k}$.

Des remarques analogues pourront être faites au sujet des règles suivantes.

26. En appliquant la règle précédente à la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots,$$

on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1},$$

et, par conséquent,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=0;$$

la série est donc convergente. Sa limite est fractionnaire et comprise entre 2 et 3; car la suite des termes $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots$ est inférieure à celle de la progression qui commencerait par les deux premiers termes, et la limite de cette dernière est moindre que l'unité. Pour avoir une limite de l'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{1}{1.2\ldots n}$, on remarquera que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ allant toujours en diminuant, les termes suivants sont au-dessous de ceux de la progression géométrique, dont les deux premiers termes seraient ceux qui suivent immédiatement $\frac{1}{1.2\ldots n}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\quad\text{et}\quad\frac{1}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}.$$

Donc la somme des termes qu'on néglige dans la proposée est inférieure à la limite de la somme des termes de cette progression, qui est

$$\frac{n+2}{1.2\ldots n(n+1)^2}.$$

C'est donc là une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à $\frac{1}{1.2\ldots n}$.

On pourrait prendre, à plus forte raison, comme limite, l'expression plus simple

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n^2},$$

dont la valeur est plus grande que la première.

Cette série est d'un grand usage dans l'Analyse, et l'on désigne ordinairement sa limite par la lettre e.

Il est facile de démontrer que sa valeur est incommensurable.

En effet, supposons qu'elle soit commensurable; comme elle n'est pas entière, elle sera représentée par une expression fractionnaire irréductible $\frac{p}{q}$, q étant > 1; on aurait ainsi l'égalité

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

En multipliant les deux nombres $1.2.3\ldots q$, on aurait

$$1.2\ldots(q-1)p = 1.2\ldots q + 2\ldots q + 3\ldots q + \ldots + 1$$
$$+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots.$$

Or la limite de la somme des termes fractionnaires du second membre est plus petite que l'unité, puisque ces termes sont inférieurs à ceux de la progression géométrique

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \ldots,$$

dont la limite est $\frac{1}{q}$, et, par conséquent, plus petite que l'unité. Donc la limite du second membre de la dernière équation ne serait pas égale au premier; ce qui est absurde. Il résulte de là que la limite de la série proposée ne pouvait être égalée à un nombre commensurable. Cette limite est donc incommensurable, comme nous voulions le démontrer.

27. La quantité que nous avons désignée par e peut être considérée comme la limite d'une autre expression remarquable que nous allons faire connaître.

Désignons par m un nombre entier positif croissant indéfiniment, et considérons l'expression

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

qui se présente sous la forme indéterminée 1^∞, quand on y fait m infini. Pour déterminer la limite vers laquelle elle tend, quand m croît indéfiniment, développons-la suivant la formule ordinaire du binôme;

nous aurons

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n} + \ldots + \frac{1}{m^m}.$$

Tous les termes du second membre sont positifs, et leur nombre est fini et égal à $m+1$. On peut mettre cette équation sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2\ldots n} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On voit d'abord qu'un terme quelconque, de rang déterminé et invariable, augmente en même temps que m; et comme le nombre total des termes augmente aussi, leur somme augmente constamment. D'où il suit que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente en même temps que m.

On reconnaît encore que, les numérateurs des termes qui forment le second membre de l'équation (1) étant moindres que l'unité, ces termes sont au-dessous des correspondants de la série

$$(2)\qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont la limite est e. D'où l'on conclut déjà que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est toujours moindre que e; mais nous allons démontrer qu'il s'en approche indéfiniment.

En effet, le terme qui en a n avant lui dans le développement (1) tend indéfiniment vers $\frac{1}{1.2\ldots n}$ à mesure que m croît. Donc la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement peut différer aussi peu qu'on voudra de la somme s_n des correspondants de la série (2), quelque grand que soit le nombre déterminé n. Mais la différence entre s_n et e peut devenir moindre que toute quantité donnée; donc il en est de même de celle qui existe entre e et la somme des $n+1$ premiers termes du développement (1), et, à plus forte raison, de la différence

qui existe entre e et le développement (1) tout entier, ou $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Donc enfin $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e lorsque m croît indéfiniment, en restant toujours entier.

Considérons maintenant des valeurs positives, non entières pour m. Faisons $m = \mu + \varepsilon$, ε étant une quantité positive moindre que l'unité, et μ un nombre entier. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ devient $\left(1+\frac{1}{\mu+\varepsilon}\right)^{\mu+\varepsilon}$: or on la rendra plus grande si l'on diminue le dénominateur $\mu+\varepsilon$ et qu'on augmente l'exposant $\mu+\varepsilon$; et on la rendra plus petite en augmentant le dénominateur et diminuant l'exposant. L'expression proposée sera donc comprise entre les deux suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu},$$

que l'on peut mettre respectivement sous la forme

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)}.$$

Or il est évident qu'elles tendent l'une et l'autre vers la limite e, puisque μ est entier, et que d'ailleurs le facteur $1+\frac{1}{\mu}$ et le diviseur $1+\frac{1}{\mu+1}$ tendent vers l'unité à mesure que μ augmente. Donc enfin la quantité intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tend vers e, de quelque manière que varie la quantité positive, indéfiniment croissante, désignée par m.

Si l'on pose $\frac{1}{m} = \alpha$, on énoncera le même résultat de cette autre manière.

L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite e lorsque α est une quantité positive qui tend vers zéro, suivant une loi quelconque.

Il reste à considérer le cas de $\frac{1}{m}$, ou de α, négatif et tendant vers zéro. On posera, dans ce cas, $1+\alpha = \frac{1}{1+\beta}$; β sera une quantité

positive tendant vers zéro. On tirera de cette relation

$$\alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta},$$

et, par suite,

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

Or, β étant positif, $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ tend vers e, lorsque β tend vers zéro; de plus, $1+\beta$ tend vers l'unité; donc $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend encore vers e, lorsque α est négatif.

Ainsi, *de quelque manière que la quantité α tende vers zéro, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite e.*

Remarque. — Puisque $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e, son logarithme népérien aura pour limite 1. Donc

$$\lim \mathrm{l}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \frac{\mathrm{l}(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

Ainsi α étant infiniment petit, *on pourra substituer α à $\mathrm{l}(1+\alpha)$ dans les rapports dont on cherchera la limite.*

28. Si au lieu de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ on avait développé $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, on aurait trouvé pour limite, au lieu de la série (2), la suivante :

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

qui est convergente, quel que soit x, en vertu de la règle précédente. Or

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{x}{m}}\right]^x = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

en posant $\frac{x}{m} = \alpha$; et α tend vers zéro, quel que soit x, lorsque m croît indéfiniment : donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite e^x quel que soit x, et l'on

a, par conséquent, l'identité suivante :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Ce développement important conduit immédiatement à celui de a^x, a étant un nombre quelconque. En effet, $a = e^{la}$, la caractéristique l désignant les logarithmes dans la base e, qui est celle de Néper. On aura, par suite, $a^x = e^{xla}$, et, par conséquent,

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2 l^2 a}{1.2} + \frac{x^3 l^3 a}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n l^n a}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Considérons encore la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots;$$

elle sera convergente si l'on a

$$\lim \frac{n}{n+1} x < 1 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

Elle sera divergente si l'on a $x > 1$, et les termes croîtront indéfiniment. Lorsque l'on a $x = 1$, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u}$ devient l'unité, et nous avons dit qu'on ne peut, dans ce cas, prononcer, en général, sur la convergence ou la divergence d'une série; mais il n'y a pas ici d'incertitude; car la série devient

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

et nous avons reconnu précédemment que la somme des termes de cette série est infinie.

Remarque. — Si une série ordonnée suivant les puissances de x est convergente pour $x = a$, elle le sera pour toute valeur de x ayant une valeur absolue moindre que a.

En effet, si l'on désigne par d la différence de deux exposants consécutifs, le rapport de deux termes généraux consécutifs sera $\frac{A_{n+1}}{A_n} x^d$; d'après l'hypothèse $a^d \lim \frac{A_{n+1}}{A_n}$ est tout au plus égal à 1. Si donc on

met au lieu de a un nombre z plus petit numériquement, on aura $\alpha^d \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} < 1$, et la série sera par conséquent convergente pour $x = z$.

Autre remarque. — Si une série ordonnée par rapport aux puissances de x a ses coefficients constants, et que l'on ait $x^d \lim \frac{A_{n+1}}{A_n} < 1$ pour une certaine valeur de x, les dérivées de ses termes formeront une série convergente pour cette valeur de x.

En effet, soient les deux termes consécutifs

$$A_n x^p, \quad A_{n+1} x^{p+d}.$$

Le rapport de leurs dérivées sera $\frac{p+d}{p} \frac{A_{n+1}}{A_n} x^d$, et sa limite sera $\frac{A_{n+1}}{A_n} x^d$ qui est plus petite que l'unité. La série des dérivées est donc convergente.

On peut même démontrer que la somme de cette série est la dérivée de la somme de la première.

29. Deuxième théorème. — *Une série dont le terme général est u_n est convergente lorsque $u_n^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite k plus petite que l'unité, quand n augmente indéfiniment. Elle est divergente lorsque la limite k est plus grande que l'unité.*

Supposons d'abord $k < 1$, et soit z un nombre quelconque compris entre k et 1; d'après l'hypothèse, $u_n^{\frac{1}{n}}$ finira par être constamment moindre que α, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On aura alors les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{u_n^n} < z, \quad \frac{1}{u_{n+1}^{n+1}} < z, \quad \frac{1}{u_{n+2}^{n+2}} < z \ldots :$$

d'où

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < z^{n+1}, \quad z_{n+2} < z^{n+2} \ldots$$

Donc, à partir d'une valeur convenable de n, tous les termes de la série sont au-dessous de ceux de la progression géométrique décroissante

$$z^n + z^{n+1} + z^{n+2} + \ldots :$$

donc la série proposée a une limite; et l'on aura une quantité plus

grande que l'erreur commise en s'arrêtant à u_{n-1}, en prenant la limite de cette progression géométrique, qui est $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

Supposons maintenant $k > 1$, et soit encore α un nombre quelconque compris entre k et 1; on finira par avoir $u_n^{\frac{1}{n}} > \alpha$, au delà d'une certaine valeur de n, et l'on aura alors les inégalités

$$u_n > \alpha^n, \quad u_{n+1} > \alpha^{n+1}, \ldots;$$

d'où il suit qu'à partir de u_n les termes de la série sont au-dessus de ceux de la progression géométrique croissante

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots.$$

Ils croissent donc eux-mêmes indéfiniment, et la série proposée est divergente.

Enfin, si l'on avait $k = 1$, on ne pourrait affirmer, en général, si la série est convergente ou divergente.

30. Troisième théorème. — *Si les termes d'une série*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

vont constamment en décroissant à partir du premier, cette série sera convergente ou divergente en même temps que la suivante :

$$(2) \qquad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16_{15} + \ldots.$$

En effet, supposons d'abord la première série convergente. Ses termes allant constamment en décroissant, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_9 &= u_0, \\
2u_1 &= 2u_1, \\
4u_2 &< 2u_2 + 2u_3, \\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7, \\
16u_{15} &< 2u_8 + \ldots\ldots\ldots + 2u_{15}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre ces égalités et inégalités en nombre infini,

on voit que la somme des premiers membres, qui sont les termes de la série (2), sera au-dessous de la somme de ceux de la suivante, terminés au même indice de u,

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots.$$

Or cette série n'est autre chose que la série (1) dont on aurait doublé les termes, excepté le premier. Elle a donc une limite, et, par conséquent, la série (2) en a une à plus forte raison. Ainsi, d'abord la convergence de la première série entraîne celle de la seconde. Supposons, en second lieu, la série (1) divergente, ses termes allant toujours en décroissant; on aura évidemment les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_3 &= u_0,\\
2u_1 &> u_1 + u_2,\\
4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
8u_7 &> u_7 + u_8 \ldots\ldots + u_{14},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ajoutant les premiers membres entre eux, ainsi que les seconds, on reconnaît que la somme des termes de la série (2) est plus grande que la somme de ceux de la série (1), terminés à celui d'indice double; et comme cette dernière croît indéfiniment par hypothèse, il en est de même de l'autre. D'où il suit encore, comme on voulait le démontrer, que la divergence de la série (1) entraîne celle de la série (2). Donc, enfin, les deux séries proposées sont toujours en même temps convergentes ou divergentes.

31. Prenons par exemple, pour la série (1), la suivante :

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots;$$

la série (2) deviendra

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \ldots.$$

Or cette dernière est une progression géométrique dont la raison est $2^{1-\mu}$. Elle est décroissante si l'on a $\mu > 1$, et croissante si $\mu < 1$ ou $\mu = 1$. Donc aussi la série (3) est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu < 1$, ou $\mu = 1$.

La consequence relative à $\mu = 1$ montre que la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

est infinie, comme nous l'avions déjà reconnu.

32. Quatrième théorème. — *La série*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, lorsque, n croissant indéfiniment, $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ *a une limite plus grande que l'unité. Elle est divergente si cette limite est plus petite que l'unité.*

En effet, soit h cette limite, et supposons d'abord $h > 1$. On aura donc, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, α désignant un nombre compris entre 1 et h,

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} > \alpha \quad \text{ou} \quad n_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée, à partir de u_n, sont donc inférieurs à ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots.$$

Or celle-ci est convergente d'après le théorème précédent, puisque l'on a $\alpha > 1$; donc aussi la proposée est convergente.

Supposons en second lieu $h < 1$, et soit α un nombre compris entre 1 et h. On finira par avoir, au delà d'une certaine valeur de n,

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} < \alpha \quad \text{ou} \quad u_n > \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée seront donc alors au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots.$$

Mais cette dernière est divergente, puisque l'on a $\alpha < 1$: donc la proposée l'est aussi. *Ce qu'il fallait démontrer.*

33. Lorsque la limite h est l'unité, on ne peut, en général, prononcer sur la convergence ou la divergence de la série. Cependant, lorsque le rapport $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ est toujours inférieur à sa limite 1, il est facile de démontrer que la série est divergente.

En effet, l'inégalité $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} < 1$ donne

$$u_n > \frac{1}{n};$$

donc les termes de la série proposée sont au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots,$$

que nous avons démontrée divergente. La proposée l'est donc elle-même.

Si le rapport $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ est, au contraire, toujours supérieur à sa limite 1, on prouverait bien que les termes de la série proposée sont au-dessous de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots;$$

mais, celle-ci étant divergente, on ne saurait en conclure que la proposée est convergente.

Autre règle pour la convergence des séries.

34. Remarquons d'abord que si l'on a une série convergente, ayant tous ses termes positifs,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

et qu'une autre série

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$$

soit telle, que, depuis un certain terme jusqu'à l'infini, on ait

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

cette seconde série sera convergente; car, si l'on multiplie la première par $\frac{v_n}{u_n}$, n ayant une valeur déterminée telle, que la condition supposée soit remplie, la série ainsi obtenue sera encore convergente. Or tous les termes de la seconde, depuis v_n, se trouveront inférieurs aux termes correspondants de cette dernière; donc la seconde série sera elle-même convergente. Elle serait divergente si la première l'était et qu'on eût $\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Cela posé, considérons une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

telle, que l'on ait

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{n_n}$ étant toujours plus petit que l'unité, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On pourra mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

α étant positif et tendant vers zéro.

Or nous allons démontrer que, si l'on a

$$\lim n\alpha > 1,$$

la série sera convergente; et qu'elle sera divergente si l'on a

$$\lim n\alpha < 1.$$

1° Soient

$$\lim n\alpha = k \quad \text{et} \quad k > 1.$$

Désignons par m une quantité déterminée quelconque, comprise entre 1 et k, et, par conséquent, plus grande que l'unité. Il est facile de voir que, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet, d'après le n° 182, nous aurons

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n}(1+\omega).$$

ω tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira que l'on ait

$$\alpha > \frac{m}{n}(1+\omega),$$

ou

$$n\alpha > m(1+\omega).$$

Or, à mesure que n augmente, le second membre tend vers m et le premier vers k qui est $> m$: donc, depuis une valeur déterminée de n jusqu'à l'infini, l'inégalité aura lieu ; donc, depuis cette valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1-\alpha > \left(1+\frac{1}{n}\right)^m;$$

et, par suite,

$$\frac{1}{1-\alpha} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^m};$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Mais si l'on considère la série

$$(1) \qquad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \ldots;$$

le rapport du terme général au précédent sera

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

et, par conséquent, plus grand que dans la série proposée. De plus, la série (1) est convergente, puisque l'on a $m > 1$: donc aussi la série proposée est convergente ; ce que nous nous proposions de démontrer.

2° Soit maintenant

$$\lim n\alpha = k \quad \text{et} \quad k < 1.$$

Prenons une quantité quelconque m comprise entre 1 et k, et, par

suite, plus petite que l'unité ; je dis que l'on finira par avoir constamment

$$1 + \alpha < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

ou

$$\alpha < \frac{m}{n}(1 + \omega),$$

ou encore

$$n\alpha < m(1 + \omega).$$

En effet, lorsque n croît indéfiniment, le premier membre tend vers k, et le second vers m, qui est plus grand que k. Donc, depuis une certaine valeur n jusqu'à l'infini, les inégalités précédentes auront lieu; d'où il résultera

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m},$$

et, par conséquent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^m}$. Mais, m étant plus petit que l'unité, cette dernière série est infinie; donc la proposée l'est aussi.

Donc enfin, comme nous l'avions annoncé, la série proposée sera convergente si l'on a $\lim n\alpha > 1$, et divergente si l'on a $\lim n\alpha < 1$.

35. On ne peut, en général, prononcer sur la nature de la série, lorsque l'on a

$$\lim n\alpha = 1.$$

Néanmoins, si $n\alpha$ est toujours plus petit que la limite 1, on peut affirmer que la série est divergente ; car alors on a

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1 + \frac{1}{n}},$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur au rapport $\frac{n}{n+1}$ relatif à la série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} + \ldots,$$

d'où il résulte que la série proposée est infinie.

Le seul cas qui reste douteux est donc celui où l'on a

$$\lim n\alpha = 1,$$

$n\alpha$ n'étant pas constamment plus petit que 1.

36. Appliquons cette règle à la série

$$1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2n+1} + \ldots.$$

On aura, dans ce cas,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}, \quad n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

et, par suite,

$$\lim n\alpha = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

d'où il résulte que la série proposée est convergente.

Considérons maintenant cette autre série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} + \ldots,$$

pour laquelle on a encore $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aura pour valeur

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}}.$$

On aura donc

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1}$$

et

$$\lim n\alpha = \frac{1}{2},$$

d'où il résulte que la série est divergente et que la somme est infinie.

Séries dont tous les termes ne sont pas de même signe.

37. Lorsqu'une série n'a pas tous ses termes de même signe, il est évident qu'elle sera convergente, si elle l'est quand on donne le même signe à tous ses termes, par exemple quand on les prend tous positifs. En effet, la somme des termes qui suivent l'un quelconque de ceux de la série proposée est moindre que la somme des correspondants de la seconde, quel que soit le nombre que l'on en considère, puisque tous ses termes s'ajoutent entre eux dans la seconde, tandis que les uns s'ajoutent et les autres se retranchent dans la première. Donc, puisqu'à partir d'un certain terme de la seconde la somme des suivants a une limite qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, il en est de même à plus forte raison dans la première; et, par conséquent, elle est convergente.

On peut donc d'abord appliquer à ces nouvelles séries les règles données pour celles dont tous les termes sont de même signe, tant pour reconnaître la convergence que pour calculer une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque; mais ces règles ne dispensent pas d'en chercher de nouvelles, spécialement applicables aux séries dont tous les termes ne sont pas de même signe; parce qu'une pareille série peut être convergente, et devenir divergente quand on donne le même signe à tous ses termes. Nous nous bornerons à celle qui résulte du théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Lorsque dans une série les termes finissent par être constamment décroissants, et alternativement positifs et négatifs, cette série est toujours convergente; et l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre que le suivant.*

Soit la série

$$u_0 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots.$$

Désignons, en général, par s_m la somme des termes depuis le premier jusqu'à u_m inclusivement.

Nous remarquerons d'abord que la somme s_n de termes dont le dernier est positif ne peut être que diminuée par l'addition d'un nombre quelconque des termes suivants. En effet, pour passer de la somme s_n à s_{n+1}, il faut retrancher u_{n+1}; donc on a $s_{n+1} < s_n$. Pour obtenir la somme suivante s_{n+2}, il faut ajouter u_{n+2}, qui est moindre que le terme u_{n+1} qui a été retranché de s_n; donc on a encore $s_{n+2} < s_n$. Le même raisonnement se reproduisant indéfiniment, on voit que la somme s_n est plus grande que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

On voit, au contraire, que, si l'on s'arrête à un terme négatif, la somme sera toujours moindre que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

Ainsi les sommes dont le dernier terme est positif vont toujours en diminuant et celles dont le dernier terme est négatif augmentent constamment, en restant toujours au-dessous des premières. Ces deux suites de sommes se rapprochent donc de plus en plus à mesure qu'on avance dans la série, et leur différence tend vers zéro, puisqu'elle n'est autre chose que le dernier terme de la dernière, lequel tend vers zéro, par hypothèse, à mesure que son indice augmente indéfiniment.

Donc enfin *la somme des termes tend vers une limite déterminée, et l'erreur positive ou négative est toujours moindre que le terme qui suit celui auquel on s'est arrêté.*

Soit, par exemple, la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est exprimé généralement par $\frac{n}{n+1}x$, et sa limite est x. Ainsi, d'abord la série sera convergente si l'on a $x < 1$ en valeur absolue, divergente si $x > 1$. Lorsque $x = 1$, la série est convergente en vertu de la dernière règle, puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et décroissent indéfiniment; mais, si l'on prenait $x = -1$, la série aurait une somme infinie.

Lorsque la série est convergente, l'erreur que l'on commet, c'est-à-dire la quantité que l'on omet, en s'arrêtant à $\frac{x^n}{n}$, est moindre que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et de même signe que ce terme.

Remarque. — Dans les séries dont les termes ne sont pas tous de même signe, la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs n'est autre chose que la différence des sommes de deux séries à termes positifs; mais il faut avoir bien soin de retrancher les sommes terminées à des termes tels que le résultat soit la somme des termes consécutifs de la série proposée. Si l'on ne satisfaisait pas à cette condition, et que les deux sommes à termes positifs pussent croître indéfiniment, comme cela a lieu par exemple dans la série dont nous venons de parler

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

le résultat ne serait pas déterminé, car il proviendrait de la différence de deux quantités, devenant infinies, sans avoir entre elles une dépendance bien déterminée. Nous nous bornons à cette remarque, qui donne la raison générale des résultats intéressants qu'a donnés à ce sujet M. Lejeune-Dirichlet.

Pour donner un exemple simple de séries convergentes sous certaines conditions de groupement de termes, considérons l'expression de π donnée par Wallis

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}, \ldots;$$

on en tire

$$l\frac{\pi}{4} = l\frac{2}{3} + l\frac{4}{3} + l\frac{4}{5} + l\frac{6}{5} + l\frac{6}{7} + l\frac{8}{9}$$

$$= l2 - l3 + l4 - l3 + l4 - l5 + l6 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9.$$

Les termes de cette dernière série doivent être pris en nombre pair d'après la manière dont on l'a obtenue; mais, comme ces termes croissent indéfiniment, il est clair que, si l'on en prenait un nombre impair, on aurait une somme qui s'éloignerait de $l\frac{\pi}{4}$ d'une quantité indéfiniment croissante, alternativement positive et négative.

THÉORÈME II. — *Si l'on multiplie par des nombres positifs décroissants les termes positifs ou négatifs d'une série convergente, on obtiendra une nouvelle série convergente.*

Ce théorème est dû à Abel, et il est loin d'être évident, parce que les multiplicateurs ne sont pas constants et peuvent porter très-inégalement sur les termes positifs et sur les termes négatifs, dont les sommes prises séparément sont supposées infinies; sans quoi il n'y aurait pas de difficulté.

Considérons une série convergente dont les termes ont des signes quelconques.

Multiplions ces termes par des nombres qui, à partir d'un certain rang, sont tous positifs et décroissants. Désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots$ les termes à partir de ce rang, et multiplions-les respectivement par les facteurs

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots$$

positifs et décroissants. Posons

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m = s_m,$$

$$\varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_m u_m = \sigma_m;$$

s_m tendra vers zéro à mesure que le terme u_0 sera supposé plus avancé dans la série convergente.

On aura évidemment

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad u_2 = s_2 - s_1, \ldots, \quad u_m = s_m - s_{m-1},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \varepsilon_0 s_0 + \varepsilon_1(s_1 - s_0) + \varepsilon_2(s_2 - s_1) \ldots + \varepsilon_m(s_m - s_{m-1}) \\ &= (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)s_0 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)s_2 + \ldots + (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m)s_{m-1} + \varepsilon_m s_m.\end{aligned}$$

Or les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ étant décroissants, les coefficients des sommes $s_0, s_1, \ldots, s_m$ sont tous positifs et la somme des termes est égale à la somme de ces coefficients, multipliée par une certaine moyenne μ entre ces sommes : on aura donc

$$\sigma_m = \varepsilon_0 \mu.$$

Or μ peut devenir moindre que toute quantité donnée, à mesure que u_0 sera plus avancé dans la série proposée; il en sera donc de même de σ_m, et par conséquent la seconde série sera aussi convergente.

Des séries imaginaires.

38. Lorsque les termes d'une série sont de la forme $u + v\sqrt{-1}$, on entend que cette série est convergente lorsque la somme des termes réels a une limite s, et que la somme des coefficients de $\sqrt{-1}$ tend de même vers une limite t : on dit alors que la limite de la série est $s + t\sqrt{-1}$.

On est ainsi ramené aux conditions de convergence de deux séries réelles; mais il suffit souvent d'en considérer une seule, celle qui se rapporte aux modules des termes de la proposée.

En effet, on peut toujours poser

$$u + v\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

et la série proposée prend la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_0(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0) + \rho_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) + \ldots \\ &\qquad + \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Or, si la série

$$(2) \qquad \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n + \ldots$$

est convergente, en prenant tous les termes positifs, il s'ensuit, à plus forte raison, que les deux suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho_0 \cos\theta_0 + \rho_1 \cos\theta_1 + \ldots + \rho_n \cos\theta_n + \ldots, \\ \rho_0 \cos\theta_0 + \rho_1 \sin\theta_1 + \ldots + \rho_n \sin\theta_n + \ldots \end{cases}$$

le seront elles-mêmes; car, à partir d'un terme quelconque, la somme des suivants jusqu'à l'infini est évidemment moindre que dans la première. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Une série imaginaire est convergente lorsque la série des valeurs absolues des modules de tous ses termes est convergente.

Lorsque la série (2) n'est pas convergente, il est possible que ses termes tendent ou ne tendent pas vers zéro. S'ils n'y tendent pas, les séries (3) ne peuvent être toutes deux convergentes; car, quelque valeur qu'on puisse opposer à l'angle θ, il est impossible que $\rho \cos\theta$ et $\rho \sin\theta$ tendent tous deux vers zéro, si ρ n'y tend pas. Les termes des deux séries (3) ne peuvent donc tendre vers zéro, ce qui est cependant une des conditions indispensables de la convergence. *La série* (1) *est donc, dans ce cas, divergente.*

En second lieu, si, la série (2) étant divergente, ses termes décroissent indéfiniment, il n'est pas impossible que les séries (3) soient convergentes, parce que tous leurs termes ne sont pas de même signe; on ne peut donc alors rien affirmer, en général, sur la convergence de la série proposée.

NOTE IV.

DES PRODUITS DE FACTEURS EN NOMBRE INFINI.

Considérons un nombre indéfiniment croissant de facteurs, variables avec leur rang n, suivant une loi donnée. Cherchons la limite vers laquelle tend la fonction de n qui en donne l'expression générale, à mesure que n croît indéfiniment : soit k cette limite.

Il est évident que, si l'on a $k > 1$, les facteurs finiront par être toujours supérieurs à un nombre fixe plus grand que l'unité, et leur produit croîtra sans limite. Si l'on a $k < 1$, les facteurs finiront par rester inférieurs à un nombre fixe plus petit que l'unité, leur produit aura zéro pour limite.

Il n'y a donc de question que lorsque l'on a $k = 1$, et nous nous proposons de trouver à quel caractère on pourra reconnaître alors si le produit tend vers une limite finie, c'est-à-dire s'il est *convergent*.

Si la fonction de n, qui représente le terme de rang n, n'avait pas de limite, quand n croît indéfiniment, mais que depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini elle eût une valeur constamment supérieure à un nombre fixe plus grand que l'unité, ou une valeur constamment inférieure à un nombre plus petit que l'unité, les deux premières propositions subsistent évidemment; mais il est nécessaire que cette fonction ait une limite et que cette limite soit l'unité, pour que le produit puisse converger vers une limite finie.

En effet, si ce produit a une limite, on peut affirmer que, quand on aura pris un nombre suffisant de facteurs, on aura un produit qui différera de cette limite, ainsi que tous les suivants, d'une quantité inférieure à toute quantité fixe et qui, par conséquent, sera toujours supérieure à un nombre fixe M; d'où il suit qu'on ne pourra plus trouver par la suite aucun facteur supérieur à un nombre $1 + \omega$, ω étant fixé aussi petit qu'on voudra; car, le produit précédent étant un nombre supérieur à M, le suivant le surpassera de plus que la quantité fixe $M\omega$, ce qui est contradictoire à la supposition de convergence.

Conditions de convergence. — Les premiers facteurs en nombre quelconque donnant un produit déterminé, quelque grand qu'il soit, ne peuvent influer sur la convergence, et il suffit de considérer les facteurs depuis un rang aussi avancé qu'on voudra jusqu'à l'infini. Nous pouvons donc nous borner à considérer le produit suivant :

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ldots(1+\varepsilon_n)\ldots,$$

composé d'une infinité de facteurs dont les seconds termes pourront être supposés tous inférieurs à un nombre désigné quelconque.

Pour que ce produit tende vers une limite, il est nécessaire et suffisant que son logarithme en ait une. Il faut donc que la série

$$l(1+\varepsilon)+l(1+\varepsilon_1)+\ldots+l(1+\varepsilon_n)+\ldots$$

soit convergente. Or, ε, $\varepsilon_1,\ldots$ pouvant être supposés plus petits que l'unité, on peut développer ces logarithmes suivant les puissances de ces quantités, et écrire

$$l(1+\varepsilon)=\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\omega),$$

$$l(1+\varepsilon_1)=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1^2}{2}(1+\omega_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l(1+\varepsilon_n)=\varepsilon_n-\frac{\varepsilon_n^2}{2}(1+\omega_n),$$

ω, $\omega_1,\ldots$ étant des quantités tendant vers zéro en même temps que ε, $\varepsilon_1,\ldots$. Or, tous les facteurs ε^2, ε_1^2 étant de même signe, la somme des seconds termes des seconds membres est égale à la somme de ces facteurs multipliée par une moyenne entre les autres facteurs. On aura donc

$$\begin{aligned} &l(1+\varepsilon)+l(1+\varepsilon_1)+\ldots \\ &\quad=\varepsilon+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n+\ldots-\frac{1}{2}(\varepsilon^2+\varepsilon_1^2+\ldots+\varepsilon_n^2+\ldots)(1+\omega'), \end{aligned}$$

ω' étant intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des valeurs algébriques ω, $\omega',\ldots$

La somme des logarithmes sera convergente, si les deux séries qui composent le second membre le sont. Si tous les termes de la première étaient de même sigue, il suffirait qu'elle fût convergente pour que la seconde le fût, puisque ses termes sont moindres que ceux de la première ; et d'ailleurs on aurait pu, dans ce cas, arrêter les développements au premier terme et raisonner comme nous l'avons fait en nous arrêtant au second ; mais si la convergence de la première tenait à la diffé-

rence des signes de ses termes, elle pourrait ne pas entraîner celle de la seconde. On peut donc énoncer la proposition suivante :

On reconnaîtra que le produit

$$(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\ldots(1+\varepsilon_n)\ldots$$

sera convergent en s'assurant que la série des seconds termes est convergente, ainsi que la série de leurs carrés.

Exemples. — Le produit

$$\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\cdots$$

est convergent, car la série des seconds termes est convergente et, comme ils sont de même signe, cette condition suffit.

Mais si l'on considère le produit

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots,$$

la somme algébrique des seconds termes est convergente à cause des signes alternatifs; mais la somme de leurs carrés, ou

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots,$$

est infinie. Le logarithme du produit tend donc vers $-\infty$, et le produit vers zéro.

Sur la décomposition de $\sin x$ *et* $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Euler a donné, dans l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits*, les formules importantes au moyen desquelles on peut remplacer les sinus et cosinus par des produits de facteurs du premier degré, en nombre infini. Ses démonstrations n'avaient pas toute la rigueur désirable; on les a perfectionnées sous ce rapport, mais en leur faisant peut-être perdre un peu de leur simplicité. L'objet de cette Note est de réunir, autant qu'il m'a paru possible, les deux avantages.

Je commencerai par établir quelques propositions simples, qui retarderaient la marche du calcul si on les y laissait engagées.

Premier lemme. — Soient a, b deux arcs compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et

$a < b$; on aura

$$\frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

En effet, on sait que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ décroît lorsque x croît, depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. D'où il résulte d'abord

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b}.$$

Il en résulte encore, en considérant les quatre valeurs 0, a, b, $\frac{\pi}{2}$ de x, que les rapports suivants sont rangés par ordre de valeurs décroissantes

$$1, \quad \sin a, \quad \frac{\sin b}{b}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Donc le rapport du second au troisième est moindre que celui du premier au quatrième, et, par conséquent,

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

Ainsi, comme on l'avait énoncé, $\frac{\sin a}{\sin b}$ est compris entre

$$\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

Deuxième lemme. — Si l'on désigne par m un nombre entier quelconque, on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + A\cos^{m-2}x + B\cos^{m-4}x + \ldots \pm 1 \\ \text{si } m \text{ est pair, et} \\ \cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + A\cos^{m-2}x + \ldots \pm M\cos x \\ \text{si } m \text{ est impair,} \end{array} \right.$$

A, B,..., M désignant des valeurs numériques que nous n'avons pas besoin de déterminer.

On aura semblablement, pour $\sin mx$, les formules suivantes

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin mx = \sin x(2^{m-1}\cos^{m-1}x + A\cos^{m-3}x + \ldots \pm 1) \\ \text{si } m \text{ est impair, et} \\ \sin mx = \sin x(2^{m-1}\cos^{m-1}x + A\cos^{m-3}x + \ldots + M\cos x) \\ \text{si } m \text{ est pair.} \end{array} \right.$$

Ces diverses formules résultent de ce que les sinus ou les cosinus d'arcs croissant d'une quantité constante x forment deux séries récurrentes, ayant l'une et l'autre pour échelle de relation $2\cos x - 1$. En partant des deux premiers arcs o et x, on calculera facilement, au moyen de cette loi, les valeurs successives de

$$\cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \cos 4x, \ldots,$$

ainsi que de

$$\sin 2x, \quad \sin 3x, \ldots.$$

La détermination générale des coefficients A, B,..., M nous est inutile et demanderait des développements dans lesquels nous n'entrerons pas. Quant à la forme des expressions (1) et (2), elle résulte immédiatement de la loi de formation que nous venons d'indiquer. Elle s'aperçoit tout de suite pour les premières, et se généralise par un raisonnement si fréquemment employé, que nous croyons inutile de le rappeler.

Décomposition de $\cos mx$ *en* m *facteurs.*

Troisième lemme. — Les seconds membres des équations (1), étant des polynômes du degré m par rapport à $\cos x$, peuvent être décomposés en m facteurs de la forme $\cos x - \alpha$, α désignant une quelconque des valeurs de $\cos x$ qui annulent ces polynômes ou leur égal $\cos mx$. Or les valeurs de mx, qui annulent $\cos mx$, sont toutes renfermées dans l'expression générale

$$\frac{\pi}{2} + n\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. En les divisant par m, on aura les arcs dont les cosinus seront les différentes valeurs de α. Pour avoir toutes ces valeurs, il suffira de donner à n un nombre m de valeurs consécutives partant de o, par exemple, ce qui conduira aux arcs suivants :

$$\frac{\pi}{2m}, \quad \frac{3\pi}{2m}, \ldots, \quad \pi - \frac{\pi}{2m}.$$

La somme de deux quelconques de ces arcs, équidistants des extrêmes, est π, et, si m est impair, le terme situé au milieu est égal à $\frac{\pi}{2}$; et, comme les cosinus de deux arcs dont la somme est π sont égaux et de signes contraires, les cosinus des arcs précédents ou les m valeurs

de α seront

$$\pm\cos\frac{\pi}{2m},\quad \pm\cos\frac{3\pi}{2m},\cdots,\quad \cos\frac{\pi}{2}$$

si m est impair, et

$$\pm\cos\frac{\pi}{2m},\quad \pm\cos\frac{3\pi}{2m},\cdots,\quad \pm\cos\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

si m est pair.

On aura donc

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}\right)\right]$$

pour m impair, et

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]$$

pour m pair.

Ainsi, quel que soit le nombre entier m, $\cos mx$ se trouve décomposé en m facteurs du premier degré par rapport à $\cos x$, ou, en multipliant les facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme et observant qu'on a, en général,

$$\cos^2 u - \cos^2 v = \sin^2 v - \sin^2 u,$$

$$\cos mx = 2^{m-1}\cos x\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right]$$

pour m impair, si

$$\cos mx = 2^{m-1}\left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m} = \sin^2 x\right]$$

pour m pair.

On peut remarquer qu'en faisant $x = 0$ dans ces formules on obtient les relations suivantes :

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{3\pi}{2m}\cdots\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} = \frac{1}{2^{m+1}},$$

si m est impair, et

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}\sin^2\frac{3\pi}{2m}\cdots\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{1}{2^{m-1}}$$

si m est pair.

En y ayant égard, les formules précédentes deviennent :

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos mx=\cos x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\\
&\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m}}\right]\\
&\text{pour } m \text{ impair, et}\\
&\cos mx=\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\\
&\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}}\right]\\
&\text{pour } m \text{ pair.}
\end{aligned}\right.$$

Décomposition de $\sin mx$ *en* m *facteurs.*

Quatrième lemme. — Dans les formules (2), le polynôme du degré $m-1$ par rapport à $\cos x$ est rendu nul par les valeurs de x correspondant à $\sin mx=0$. Les valeurs de mx qui satisfont à cette dernière condition sont renfermées dans l'expression générale $n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif; mais, comme un polynôme de degré $m-1$ ne peut avoir plus de $m-1$ racines, il suffira de prendre $m-1$ valeurs de $\frac{n\pi}{m}$, donnant des cosinus différents et n'annulant pas le facteur $\sin x$; ces cosinus seront les racines du polynôme. Les arcs ainsi obtenus seront

$$\frac{\pi}{m},\quad\frac{2\pi}{m},\quad\frac{3\pi}{m},\ldots,\quad\pi-\frac{\pi}{m}.$$

Tous ces arcs, étant compris entre 0 et π, ont des cosinus différents, et la somme de deux quelconques équidistants des extrêmes étant π, les cosinus sont, deux à deux, égaux et de signes contraires. Si m est pair, un des arcs sera $\frac{\pi}{2}$, et le cosinus correspondant sera nul. Cela n'arri-

vera pas si m est impair; et c'est ce qu'indiquent immédiatement les formules (2). D'après cela, on aura

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)$$
$$\times\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)$$
$$\times\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right]\cos x$$

si m est pair; ou, en réunissant les facteurs deux à deux, et introduisant les sinus au lieu des cosinus,

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1}\sin x\cos x\left(\sin^3\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est pair.

On simplifiera ces formules en remarquant que, si on les divise par x, et qu'on fasse tendre x vers o, on obtient les suivantes :

$$2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}\cdots\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) = m,$$

pour m impair, et

$$2^{m-1}\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{2\pi}{m}\cdots\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) = m$$

pour m pair.

Les formules précédentes deviennent, d'après ces relations,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin mx = m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m}{\pi}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots \\ &\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}\right)}\right] \\ &\text{pour } m \text{ impair, et} \\ &\sin mx = m\sin x\cos x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots \\ &\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}\right)}\right] \\ &\text{pour } m \text{ pair.}\end{aligned}\right.$$

Développement de $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Si dans les formules (3) on change la quantité arbitraire x en $\frac{x}{m}$, elles deviennent :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos x = \cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \\ &\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{m}\right)}\right] \\ &\text{pour } m \text{ impair, et} \\ &\cos x = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{m}{x}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots \\ &\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}}{\sin^2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{\pi}{2m}\right)}\right] \\ &\text{pour } m \text{ pair;}\end{aligned}\right.$$

et, comme m est un nombre entier quelconque, $\cos x$ se trouve ainsi représenté par le produit d'un nombre arbitraire de facteurs.

La question que nous venons de poser ici est de déterminer la forme vers laquelle tend la valeur constante du second membre, lorsque le nombre de ces facteurs croît indéfiniment.

Si l'on considère un facteur quelconque $1 - \dfrac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2m}}$, n désignant un nombre impair aussi grand que l'on voudra, les arcs $\frac{m}{x}$, $\frac{n\pi}{2m}$ tendant vers zéro lorsque m croît indéfiniment, le rapport de leurs sinus aura pour limite le rapport des arcs $\frac{2x}{n\pi}$, et la limite du facteur sera $1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}$.

Comme d'ailleurs le facteur $\cos \frac{x}{m}$ tend vers l'unité, en arrive d'abord à cette conclusion que, quelque grand que soit le nombre impair déterminé n, le produit des facteurs qui entrent dans les expressions (5), jusqu'à cette valeur de n, devient, lorsque m croît indéfiniment, aussi voisin qu'on voudra du suivant :

$$(6) \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Il resterait donc à trouver la limite vers laquelle tend le produit des facteurs suivant les expressions (5). Pour cela, nous remarquerons que, quelque grand qu'on suppose x, on peut toujours prendre un nombre impair μ tel, que l'on ait $x < \frac{\mu\pi}{2}$ ou $\frac{x}{m} < \frac{\mu\pi}{2m}$; et, en prenant $m > \mu$, $\frac{\mu\pi}{2m}$ sera plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Les deux arcs $\frac{x}{m}$, $\frac{\mu\pi}{m}$ seront donc dans les conditions de deux arcs respectifs a, b dans le premier lemme; et l'on aura, par conséquent,

$$\frac{\sin \frac{m}{x}}{\sin \frac{\mu\pi}{2m}} > \frac{2x}{\mu\pi} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \frac{m}{x}}{\sin \frac{\mu\pi}{2m}} < \frac{\pi}{\mu},$$

d'où résulte

$$1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\mu\pi}{2m}}<1-\frac{4x^2}{\mu^2\pi^2} \quad \text{et} \quad >1-\frac{x^2}{\mu^2}.$$

Considérons maintenant les produits de facteurs en nombre infini dont ces deux dernières expressions seraient les formes générales, c'est-à-dire

$$(7) \qquad \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

et

$$(8) \qquad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)\cdots.$$

Ces produits tendent vers des limites déterminées à mesure que le nombre des facteurs augmente indéfiniment, parce que les séries des seconds termes de ces facteurs, pris avec le même signe, sont convergentes. Il résulte de là que l'on peut prendre un assez grand nombre de facteurs à partir du premier, dans les expressions (7) et (8), pour que la limite du produit des suivants soit aussi peu différente de l'unité qu'on le voudra. Et si, au lieu de prendre la limite du produit de ces derniers, on ne prenait que le produit d'un nombre limité d'entre eux, on aurait une quantité encore plus voisine de l'unité, puisque chacun de ces facteurs est plus petit que l'unité.

Ces remarques très-simples nous conduisent immédiatement à la solution de notre question.

En effet, il en résulte d'abord qu'on peut prendre n assez grand pour que les valeurs des expressions (6) et (7) aient une différence aussi petite que l'on voudra. Il en est donc de même du produit des facteurs correspondant à (6) dans les expressions (5), lorsque l'on suppose que m croît indéfiniment.

Quant aux facteurs qui suivent ceux-ci dans les formules (5) et dont le produit par les premiers est toujours $\cos x$, ils sont respectivement compris entre les deux facteurs de même rang dans les expressions (7) et (8). Leur produit total est donc compris entre les produits correspondants de ces dernières, dont nous venons de démontrer que les valeurs pouvaient différer de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée. Ce produit total peut donc lui-même différer aussi peu qu'on voudra de l'unité.

On voit donc que $\cos x$ peut être considéré comme composé de deux facteurs variables, dont l'un tend indéfiniment vers l'expression (7), et l'autre vers l'unité. Donc, enfin, $\cos x$ est égal à la valeur représentée par cette expression (7), quel que soit x.

D'où résulte la formule suivante :

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]\cdots,$$

au moyen de laquelle $\cos x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs algébriques du premier ou du second degré, dont la formule générale est

$$1 \pm \frac{2x}{(2k+1)\pi},$$

k désignant un nombre entier quelconque, et qui, égalé à zéro, donne toutes les racines de $\cos x = 0$.

Développement de $\sin x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Les formules (4) deviennent, en remplaçant x par $\frac{x}{m}$,

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots$$
$$\times\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)}\right]$$

pour m impair, et

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots$$
$$\times\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}\right]$$

pour m pair,

Or on a $m \sin \frac{x}{m} = x \frac{m}{x} \sin \frac{x}{m}$, et, si l'on fait croître m indéfiniment, $\frac{m}{x} \sin \frac{x}{m}$ ou $\frac{\sin \frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ tend vers l'unité; il en est de même de $\cos \frac{x}{m}$. Quant aux autres facteurs, si l'on en prend un quelconque $1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{n\pi}{m}}$, sa limite sera $1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}$.

On trouvera donc, en employant les mêmes considérations que pour $\cos x$,

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots$$

Ainsi $\sin x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs du premier degré en x, dont le premier est x, et les autres sont renfermés dans la formule générale

$$1 \pm \frac{x}{n\pi},$$

n désignant un nombre entier quelconque. En les égalant à zéro, on trouve toutes les racines de l'équation $\sin x = 0$, qui sont représentées par la formule $\pm n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque qui peut être zéro.

APPENDICE.

NOTE SUR LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE;

PAR M. J. BERTRAND,

Membre de l'Institut.

Définition d'une fonction imaginaire.

1. Lorsqu'une fonction $\varphi(z)$ est donnée pour toutes les valeurs réelles de la variable z dont elle dépend, elle n'acquiert pour cela aucun sens lorsqu'on y remplace z par une expression imaginaire $x+y\sqrt{-1}$: l'expression $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ ne peut donc s'introduire dans les calculs ou dans les raisonnements, sans une définition précise qui, pour toutes les valeurs réelles de x et de y, en fasse connaître la partie réelle et la partie imaginaire, en permettant d'écrire

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1},$$

P et Q étant deux fonctions réelles connues de x et de y.

Il ne faut pas croire cependant que les deux fonctions P et Q puissent être choisies arbitrairement; toute expression de la forme

$$P + Q\sqrt{-1},$$

où P et Q sont des fonctions de x et de y, n'est pas une fonction de $x+y\sqrt{-1}$; pour la considérer comme telle, on exige une condition sans laquelle disparaîtrait toute analogie entre les fonctions imaginaires et les fonctions réelles; pour que la somme $P+Q\sqrt{-1}$ soit considérée comme une fonction de $x+y\sqrt{-1}$, il ne suffit pas que cette expression soit déterminée lorsqu'on se donne x et y, il faut encore qu'elle

ait une dérivée déterminée et que le rapport de son accroissement infiniment petit à l'accroissement correspondant $dx + dy\sqrt{-1}$ de la variable soit indépendant du rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$. Si l'on voulait s'affranchir de cette condition, la théorie des fonctions imaginaires serait simplement celle des fonctions de deux variables et leur étude spéciale n'offrirait aucun intérêt.

Lorsqu'on attribue à x et à y les accroissements infiniment petits dx et dy, l'accroissement de $P + Q\sqrt{-1}$ est

$$\begin{aligned}&\frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \sqrt{-1}\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy\right)\\ &\quad = \left(\frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dx}\right)dx + \left(\frac{dP}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dy}\right)dy.\end{aligned}$$

Pour que le rapport de cet accroissement à $dx + dy\sqrt{-1}$ soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, on doit avoir

$$\frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dx} = \frac{\frac{dP}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dy}}{\sqrt{-1}},$$

et l'on voit, après avoir chassé le dénominateur, que cette équation équivaut à deux autres

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}.$$

Ces deux équations sont nécessaires et suffisantes, d'après notre définition, pour que $P + Q\sqrt{-1}$ soit une fonction de $x + y\sqrt{-1}$; lorsqu'elles sont satisfaites, on a

$$\frac{d.(P + Q\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})} = \frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{dx} = \frac{dQ}{dy} - \sqrt{-1}\,\frac{dP}{dy};$$

on en conclut que, $\varphi(z)$ désignant une fonction quelconque de la variable imaginaire z égale à $x + y\sqrt{-1}$, et $\varphi'(z)$ étant la dérivée de $\varphi(z)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d.\varphi(z)}{dx} &= \varphi'(z),\\ \frac{d.\varphi(z)}{dy} &= \varphi'(z)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

Ces équations pourraient être écrites *a priori* comme conséquences de la règle de différentiation des fonctions de fonctions, s'il était permis d'invoquer cette règle avant d'avoir constaté l'existence d'une dérivée déterminée et indépendante du rapport des accroissements infiniment petits attribués à x et à y.

2. Les équations du paragraphe précédent, qui lient l'une à l'autre les fonctions P et Q, permettent d'éliminer l'une d'elles et fournissent une équation importante à laquelle l'autre, considérée isolément, doit satisfaire. En ajoutant ces équations après avoir différentié la première par rapport à x et la seconde par rapport à y, on trouve en effet

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} = 0$$

et, en les retranchant après avoir différentié la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, on a

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} = 0.$$

Ces conditions imposées aux fonctions P et Q expliquent comment une fonction imaginaire possède, ainsi que nous le verrons, un grand nombre de propriétés très-précises et indépendantes de sa définition; il ne faut pas en effet, on le comprend dès à présent, attacher à une fonction imaginaire quelconque l'idée d'une indétermination aussi complète que celle d'une fonction réelle quelconque. Pour chaque valeur de la variable, une fonction réelle peut être choisie arbitrairement, et les seules restrictions auxquelles sont soumises ses variations sont celles qui résultent de la loi de continuité; la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans une fonction imaginaire sont assujettis, au contraire, à des conditions très-précises exprimées par les équations que nous venons d'obtenir et d'après lesquelles chacune d'elles représente l'ordonnée d'une surface qui, loin d'être arbitraire, appartient à une classe toute particulière dont on conçoit fort bien que l'on puisse étudier les propriétés sans avoir besoin de rien préciser davantage.

3. Il sera utile d'exprimer les conditions nécessaires pour que la somme

$$P + Q\sqrt{-1},$$

où P et Q désignent les fonctions des variables ρ et ω, soit une fonction de

$$\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Si l'on change ρ en $\rho + d\rho$, et ω en $\omega + d\omega$, l'accroissement de $P + Q\sqrt{-1}$ est

$$\frac{dP}{d\rho}\,d\rho + \frac{dP}{d\omega}\,d\omega + \sqrt{-1}\left(\frac{dQ}{d\rho}\,d\rho + \frac{dQ}{d\omega}\,d\omega\right);$$

l'accroissement correspondant de la variable est

$$d\rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right) + \rho\,d\omega\left(-\sin\omega + \sqrt{-1}\cos\omega\right).$$

Pour que le rapport de ces deux accroissements soit indépendant de $\frac{d\rho}{d\omega}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\frac{dP}{d\rho} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{d\rho}}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega} = \frac{\frac{dP}{d\omega} + \sqrt{-1}\,\frac{dQ}{d\omega}}{\rho\left(-\sin\omega + \sqrt{-1}\cos\omega\right)};$$

en multipliant par $\rho\sqrt{-1}$ les deux termes du premier membre, les dénominateurs deviennent égaux, et l'on a, en égalant les parties réelles des numérateurs et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\rho\,\frac{dP}{d\rho} = \frac{dQ}{d\omega},$$

$$\rho\,\frac{dQ}{d\rho} = -\frac{dP}{d\omega}.$$

Telles sont, d'après nos conventions, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme $P + Q\sqrt{-1}$ soit une fonction de

$$\rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right).$$

4. Les conditions précédentes sont les seules qui soient imposées aux fonctions imaginaires et, pourvu qu'elles soient remplies, la définition reste entièrement arbitraire. On conçoit cependant qu'une fonction imaginaire ne s'introduira avantageusement dans les calculs que lorsqu'elle sera réellement la généralisation de la fonction réelle de même nom, à laquelle elle se réduit quand on suppose $y = 0$, et qu'elle partagera ses propriétés caractéristiques. Cette analogie, regardée *a priori* comme une condition essentielle, est la base des définitions que nous allons donner de quelques-unes des fonctions les plus simples.

5. Les propriétés générales des fonctions réelles doivent aussi s'appliquer aux fonctions imaginaires; les définitions doivent être telles

que cela ait lieu, et si cette condition impliquait contradiction, la théorie des fonctions imaginaires devrait être abandonnée comme inutile. C'est pour cela, par exemple, qu'une expression, déterminée lorsque $x+y\sqrt{-1}$ est donné, ne reçoit pas cependant le nom de fonction de $x+y\sqrt{-1}$, si elle n'a pas, par rapport à cette variable, une dérivée déterminée. Rien ne s'opposerait certainement à ce qu'on lui accordât ce nom; mais cela aurait l'inconvénient d'éveiller par analogie des idées inexactes.

Parmi les théorèmes applicables également aux fonctions imaginaires et réelles, nous nous bornerons à citer le suivant :

Deux fonctions imaginaires qui ont même dérivée ont une différence constante.

Soient

$$u = P + Q\sqrt{-1}, \quad u_1 = P_1 + Q_1\sqrt{-1}$$

les deux fonctions considérées. D'après les résultats obtenus (1), les dérivées de u et de u_1 étant égales, on a

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP_1}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{dQ_1}{dx},$$
$$\frac{dP}{dy} = \frac{dP_1}{dy}, \quad \frac{dQ}{dy} = \frac{dQ_1}{dy},$$

et ces équations prouvent que les dérivées des différences $P - P_1$ et $Q - Q_1$, par rapport à x et par rapport à y, sont égales à zéro; ces différences sont donc indépendantes de x et de y, et par conséquent constantes.

Définition de quelques fonctions simples.

6. *Définition de z^m lorsque m est entier.* — On est conduit, dès les éléments, à remplacer, dans la fonction z^m, la variable z par $x+y\sqrt{-1}$; on a, en appliquant la formule du binôme qui, dans le cas de l'exposant entier, résulte des règles de la multiplication,

$$\begin{aligned}(x+y\sqrt{-1})^m &= \left[x^m - \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}y^4 - \ldots\right] \\ &\quad + \sqrt{-1}\left[mx^{m-1}y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}y^3 + \ldots\right].\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que cette expression remplit la condition précédemment exprimée, et que la dérivée de z^m par rapport à z est mz^{m-1}, précisément comme dans le cas où z est réel. La démonstration repose en effet uniquement sur le développement de $(z+h)^m$, qui s'applique sans modifications au cas où z et h sont imaginaires.

La même conclusion s'applique évidemment à une fonction entière quelconque de la variable z, et toute expression de la forme

$$(1) \qquad Az^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1} z + A_m,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_m$ représentent des constantes réelles ou imaginaires, est une fonction de z qui a pour dérivée

$$mAz^{m-1} + (m-1)A_1 z^{m-2} + \ldots + A_{m-1}.$$

Si le polynôme (1) est remplacé par une série indéfinie, on sait que, pour les valeurs de la variable qui rendent la série convergente, la série des dérivées est elle-même convergente et représente la dérivée de la série. Nous pouvons, par conséquent, étendre nos conclusions aux séries convergentes ordonnées suivant les puissances de la variable. C'est là une remarque très-importante, et qui, lorsqu'une fonction réelle est développable en série convergente, permet, comme nous allons en donner des exemples, d'en étendre la définition au cas où la variable est imaginaire

7. *Définition de e^z.* — La fonction e^z, lorsque z est réel, est représentée par la série toujours convergente

$$(1) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

En remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$, on forme l'expression

$$1 + (x + y\sqrt{-1}) + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots,$$

que nous prendrons comme définition de $e^{x+y\sqrt{-1}}$. Il est facile de sommer cette série et d'en trouver la partie réelle et la partie imaginaire. En développant en effet les puissances de $(x+y\sqrt{-1})$ qui figurent dans les différents termes de la série, et réunissant, dans ces divers développements, les coefficients de $\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$, on trouve

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left[1 + y\sqrt{-1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots + \frac{(y\sqrt{-1})^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right].$$

La partie réelle est

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)=\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\cos y,$$

et la partie imaginaire

$$\frac{x^p\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots p}\left(y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right)=\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\sqrt{-1}\sin y;$$

le terme en x^p est donc

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}(\cos y+\sqrt{-1}\sin y),$$

et la série (1) se réduit à

$$(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}+\ldots\right)$$
$$=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y);$$

on a donc enfin

$$(2)\qquad e^{x+y\sqrt{-1}}=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y).$$

On peut remarquer que, dans la démonstration précédente, les termes de la série considérée ont été intervertis; mais, leurs modules formant une série convergente, cela n'a aucun inconvénient.

8. La fonction e^z étant, d'après la définition même, représentée par une seule et même série pour les valeurs réelles ou imaginaires de z, une seule et même série représentera aussi les dérivées dans les deux cas, et il en résulte que l'équation

$$(1)\qquad \frac{de^z}{dz}=e^z$$

s'applique aux valeurs imaginaires comme aux valeurs réelles de z. Il est d'ailleurs bien facile de vérifier directement que l'expression

$$e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$$

satisfait aux conditions données (1) et qu'elle est égale à sa dérivée. On peut aussi vérifier la formule

$$(2)\qquad e^z.e^u=e^{z+u}.$$

qui a lieu pour toutes les valeurs des exposants z et u. Le succès de cette vérification ne doit d'ailleurs causer aucune surprise. e^z et e^u étant en effet représentés par des séries telles, que l'équation (2) soit identique quand les variables sont réelles, il est tout simple que cette équation reste vraie quand on leur substitue des expressions imaginaires quelconques.

En supposant $x = 0$, on a

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

et, en changeant y en $-y$,

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1}\sin y;$$

on déduit de ces formules

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2},$$
$$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

9. *Définitions de* $\sin z$ *et de* $\cos z$. — Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont représentées, lorsque z est réel, par les séries toujours convergentes

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

En remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura deux séries, toujours convergentes aussi, que nous adopterons comme définitions de $\sin(x + y\sqrt{-1})$ et de $\cos(x + y\sqrt{-1})$. Il résulte immédiatement, des définitions de e^z, $\sin z$ et $\cos z$, que l'on a, pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z,

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z,$$
$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z,$$

et par conséquent

$$(1)\qquad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces formules permettent de calculer, sans recourir aux séries, la partie réelle et la partie imaginaire d'un sinus ou d'un cosinus quelconque. On a

$$(2)\quad \begin{aligned} \cos\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \frac{e^{x\sqrt{-1}-y}+e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2} \\ &= \cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\sqrt{-1}\,\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}, \\ \sin\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \frac{e^{x\sqrt{-1}-y}-e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt{-1}\,\cos x\,\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}+\sin x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}. \end{aligned}$$

Si l'on suppose $x = 0$, ces formules deviennent

$$\cos y\sqrt{-1} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2},$$

$$\sin y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sqrt{-1};$$

on en conclut

$$(3)\quad \begin{aligned} \cos\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \cos x\cos y\sqrt{-1}-\sin x\sin y\sqrt{-1}, \\ \sin\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \sin x\cos y\sqrt{-1}+\cos x\sin y\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Ces deux formules sont d'ailleurs des cas particuliers des formules plus générales

$$(4)\quad \begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u\cos v-\sin u\sin v, \\ \sin(u+v) &= \sin u\cos v+\sin v\cos u, \end{aligned}$$

qui ont lieu pour des valeurs réelles ou imaginaires de u et de v. On peut vérifier aussi la formule

$$(5)\qquad \sin^2 z+\cos^2 z = 1,$$

qui résulte des équations (1) et qui, combinée avec les équations (4), permet d'étendre au cas des variables imaginaires les formules principales de la Trigonométrie.

La forme des séries qui représentent $\sin z$ et $\cos z$ montre enfin que l'on a, pour les valeurs imaginaires comme pour les valeurs réelles de z,

$$\frac{d\sin z}{dz} = \cos z,$$

$$\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z.$$

10. *Définition de* tang z. — La fonction tang z, n'étant pas développable en série pour toute valeur réelle de z, ne peut pas, lorsque z est imaginaire, être définie par la série qui la représente. Nous poserons, comme définition,

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

et par conséquent

$$\operatorname{tang} z = \frac{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(1 - \frac{2}{1 + e^{-2z\sqrt{-1}}}\right);$$

nous poserons de même

$$\cot z = \frac{1}{\operatorname{tang} z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(1 + \frac{2}{e^{2z\sqrt{-1}} - 1}\right).$$

Les formules

$$\frac{d \operatorname{tang} z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z},$$
$$\frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

sont applicables à des valeurs quelconques de z, car la règle de différentiation des fractions, appliquée à $\frac{\sin z}{\cos z}$ et à $\frac{\cos z}{\sin z}$, donne les mêmes résultats, et les réductions ultérieures sont les mêmes lorsque l'on suppose z réel ou imaginaire.

11. *Définition de* l z. — Lorsque z et u sont liés par l'équation

$$z = e^u, \tag{1}$$

on dit que u est le logarithme népérien de z, et l'on écrit

$$u = \mathrm{l}\, z, \tag{2}$$

z étant une fonction de u, u est une fonction de z. La condition pour qu'il en soit ainsi est en effet, d'après notre définition, que le rapport $\frac{du}{dz}$ soit déterminé, et c'est ce qui a lieu nécessairement, puisque $\frac{dz}{du}$ l'est lui-même.

Si l'on suppose $z = x + y\sqrt{-1}$, la partie réelle et la partie imaginaire

de lz se déduisent aisément de la définition précédente. Soit

$$lz = p + q\sqrt{-1},$$

on doit avoir

$$(3) \qquad x + y\sqrt{-1} = e^{p+q\sqrt{-1}} = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q),$$

et cette équation équivaut aux deux suivantes :

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= e^p \cos q, \\ y &= e^p \sin q. \end{aligned}$$

On en déduit

$$(5) \qquad e^{2p} = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tang} q = \frac{y}{x},$$

et par conséquent

$$(6) \qquad p = \frac{1}{2} l(x^2 + y^2),$$

$$(7) \qquad q = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

$l(x^2 + y^2)$ est, bien entendu, le logarithme népérien ordinaire du nombre réel et positif $x^2 + y^2$; arc tang $\frac{y}{x}$ représente une infinité d'arcs. Soit α le plus petit d'entre eux; il faut remarquer que, q étant défini par son sinus et par son cosinus, on peut ajouter à α un multiple de 2π, mais non pas un multiple quelconque de π, comme cela aurait lieu si l'on n'avait égard qu'à l'équation (7); on a donc enfin

$$l(x + y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(x^2 + y^2) + \sqrt{-1}(\alpha + 2k\pi),$$

α étant le plus petit des arcs dont le sinus et le cosinus sont donnés par les équations (4) et k un nombre entier arbitraire.

L'équation

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = \cos 2\pi + \sqrt{-1}\sin 2\pi = 1$$

montre d'ailleurs, *a priori*, que l'on peut ajouter à l'exposant de e un multiple quelconque de $2\pi\sqrt{-1}$ sans changer la valeur de l'exponentielle, et qu'il est permis par conséquent aussi d'ajouter à un logarithme un multiple quelconque de $2\pi\sqrt{-1}$.

12. L'équation

$$z = e^u$$

étant, par définition, une conséquence de

$$u = \mathrm{l}z$$

on a

$$\frac{dz}{du} = z,$$

et, par conséquent,

$$\frac{du}{dz} = \frac{d\,\mathrm{l}z}{dz} = \frac{1}{z},$$

résultat facile à vérifier directement d'après la valeur de $\mathrm{l}z$.

13. *Définition de z^m pour une valeur quelconque de m.* — Si l'on fait $z = x + y\sqrt{-1}$, on a, d'après ce qui précède,

$$(1) \qquad z = e^{p+q\sqrt{-1}},$$

p et q ayant les valeurs trouvées au paragraphe (12). L'expression z^m est donc équivalente à

$$(2) \qquad \left(e^{(p+q\sqrt{-1})}\right)^m.$$

Pour élever l'exponentielle à la puissance m, nous admettrons, comme définition, qu'il faut multiplier l'exposant par m, et nous poserons en conséquence

$$(3) \qquad z^m = e^{mp+mq\sqrt{-1}},$$

q contenant dans son expression un multiple arbitraire de 2π, qui, sans influer sur la valeur de l'expression (1), change, au contraire, après la multiplication de q par m, la valeur de l'exponentielle (3); z^m n'est donc pas une fonction bien déterminée de z.

Si l'exposant m est réel et égal à $\frac{h}{g}$, h et g étant entiers, on aura

$$z^{\frac{h}{g}} = e^{\frac{hp}{g}+\frac{hq}{g}\sqrt{-1}} = e^{\frac{hp}{g}}\left(\cos\frac{hp}{g} + \sqrt{-1}\sin\frac{hp}{g}\right),$$

et si, dans cette expression, on remplace, comme cela est permis, q par $q + 2k\pi$, elle prendra un nombre de valeurs distinctes précisément égal au dénominateur g.

Si l'exposant m est imaginaire et égal à $r\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right)$, on

aura, en posant $p + q\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$,

$$z^m = e^{r\rho[\cos(\varphi+\omega)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\omega)]}$$
$$= e^{r\rho\cos(\varphi+\omega)}[\cos r\rho\sin(\varphi+\omega)] + \sqrt{-1}\sin r\rho\sin(\varphi+\omega);$$

cette expression fournissant d'ailleurs pour z^m une infinité de valeurs distinctes, puisque l'angle φ qui y figure dépend de l'expression $p + q\sqrt{-1}$, dans laquelle il est permis d'ajouter à q un multiple quelconque de 2π.

Sur les fonctions qui sont mal déterminées.

14. Parmi les fonctions que nous venons de définir, il faut distinguer avec soin e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tang} z$ et z^m lorsque m est entier, qui sont des fonctions bien déterminées. Chacune d'elles, pour une valeur réelle ou imaginaire de z, est définie sans ambiguïté. Les fonctions lz, z^m, lorsque m n'est pas entier, admettent, au contraire, pour chaque valeur de z, plusieurs valeurs distinctes également conformes à leur définition. Il est important cependant, dans un grand nombre de cas, de pouvoir préciser celle dont on veut s'occuper, et nous allons donner sur ce point quelques développements.

Lorsque l'on considère des valeurs isolées de x et de y, la définition laissant par hypothèse la fonction indéterminée, on peut adopter indifféremment l'une quelconque des expressions qu'elle fournit; mais ce premier choix une fois fait, si l'on fait varier x et y à partir des valeurs primitivement considérées, les valeurs successives de la fonction, supposée continue, sont en général déterminées, et toute ambiguïté disparaît.

Soit, par exemple, $\varphi(x + y\sqrt{-1})$ une fonction dont la définition, quelle qu'elle soit d'ailleurs, laisse subsister, pour des valeurs données de x et de y, une certaine indétermination, permettant de choisir entre des valeurs distinctes; dans certains cas, lorsque, par exemple, $\varphi(x + y\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1})$, le nombre de ces valeurs est infini.

Attribuons à x et à y des valeurs initiales x_0, y_0, pour lesquelles nous choisirons arbitrairement, parmi les valeurs conformes à la définition, celles que nous voulons adopter pour représenter

$$\varphi(x_0 + y_0\sqrt{-1}).$$

Faisons ensuite varier x et y d'une manière continue et suivant une

loi telle que le point dont x et y sont les coordonnées décrive sur le plan une courbe arbitraire commençant au point dont les coordonnées sont x_0, y_0; la condition de varier infiniment peu lorsque la variable change elle-même infiniment peu dissipera toute ambiguïté, et l'on devra adopter, en chaque point, pour la fonction, la valeur, en général unique, qui, satisfaisant à la définition, diffère infiniment peu de celle qui correspond au point infiniment voisin qui précède. Une seule exception correspond au cas où, pour l'un des points considérés, deux valeurs de la fonction deviendraient exceptionnellement égales entre elles; si la loi de continuité conduit à adopter ces valeurs en continuant à suivre la courbe qui représente la loi de variation de x et de y, on se trouvera, pour un point infiniment voisin de celui dont il est question, en présence de deux valeurs infiniment peu différentes l'une de l'autre qui, satisfaisant l'une et l'autre à la loi de continuité adoptée comme critérium, pourront être acceptées toutes deux; ces valeurs se sépareront ensuite et acquerront une différence finie, en sorte que l'ambiguïté reparaîtra pour tous les points situés au delà de ce point *critique* où elle a pris naissance.

La définition de la fonction $\sqrt{x+y\sqrt{-1}}$ lui assigne deux valeurs égales et de signes contraires, qui deviennent égales pour $x=0$, $y=0$; c'est donc, pour cette fonction, par l'origine des coordonnées qu'on devra s'abstenir de faire passer la courbe qui représente la série des valeurs de x et de y.

Pour la fonction $\mathrm{l}(1+x+y\sqrt{-1})$, le point *critique* correspond aux valeurs $y=0$, $x=-1$, pour lesquelles toutes les valeurs du logarithme deviennent infinies.

15. Il ne faut pas croire que, pour définir avec précision l'une des valeurs d'une fonction $\varphi(x+y\sqrt{-1})$, il soit nécessaire de spécifier la courbe qui réunit le point correspondant aux valeurs choisies de x et de y au point arbitraire pour lequel le choix a été fait d'abord. On conçoit, en effet, que, les valeurs possibles de la fonction ne formant pas une série continue, le changement dans la forme de la courbe étant supposé se faire graduellement et par un mouvement continu, la fonction doit nécessairement rester invariable jusqu'au moment où se produit un changement brusque qui lui fait acquérir une valeur nouvelle, et recevoir tout à coup un accroissement fini. S'il s'agit, par exemple, de la fonction $\mathrm{l}(x+y\sqrt{-1})$, pour des valeurs données de x et de y, on sait que, si elle change, elle ne peut s'accroître que d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Or nous allons montrer que ces changements brus-

ques ne sont possibles que quand la courbe, en se déformant, franchit l'un des points qui correspondent aux valeurs égales, infinies, ou indéterminées de la fonction.

Considérons en effet un point initial A ayant pour coordonnées x_0, y_0, et soit un point B dont les coordonnées sont x_1, y_1; supposons qu'un point mobile M parte de A et se rende en B en suivant une certaine courbe; si l'on se donne en A la valeur de la fonction $\varphi(x_0+y_0\sqrt{-1})$, la condition que nous lui imposons d'être continue déterminera celle qu'il faudra adopter en B pour la fonction

$$\varphi(x_1+y_1\sqrt{-1})$$

lorsque x et y auront été pris successivement égaux aux coordonnées variables du point mobile M. Supposons ensuite que l'on passe du point A au point B en suivant une courbe infiniment peu différente et telle, qu'aucun des points dont nous avons parlé ne soit compris entre elle et la précédente; en adoptant pour $\varphi(x_0+y_0\sqrt{-1})$ la même valeur que dans le cas précédent, on trouvera la même valeur aussi pour $\varphi(x_1+y_1\sqrt{-1})$. Concevons en effet que deux points mobiles M et M', parcourant nos deux courbes, partent en même temps de A, pour arriver en même temps en B, et suivant une loi telle, que leur distance soit constamment infiniment petite. Lorsque le point M parcourt la première courbe, les valeurs que prend successivement la fonction sont déterminées par l'obligation de former une suite continue; mais, pour chaque point considéré isolément, la définition de la fonction permettrait de choisir entre diverses valeurs toujours inégales par hypothèse. Soit Δ un nombre moindre que le plus petit module de la différence entre deux valeurs possibles de la fonction en un point quelconque de cette courbe; il est clair que, pour deux points infiniment voisins dont l'un est situé sur la courbe, le module de la différence entre deux valeurs de φ, compatibles avec la définition de la fonction, sera aussi supérieur à Δ, s'il n'est pas infiniment petit. Au point initial dont les cordonnées sont x_0, y_0, la valeur de la fonction a été choisie, et lorsque les deux courbes sont parcourues simultanément par des mobiles partant de ce point, la différence initiale entre les valeurs de la fonction est nulle et a zéro pour module. Ce module étant assujetti, comme nous l'avons dit, à la condition d'être toujours infiniment petit ou supérieur à Δ, ne peut, à aucun instant, cesser d'être infiniment petit, car il devrait pour cela changer brusquement de valeur pour devenir supérieur à Δ. Lorsque les deux points arriveront

ensemble en B, les valeurs correspondantes de φ différeront donc infiniment peu, et cela ne peut être sans qu'elles soient rigoureusement égales; car au point B toutes les valeurs possibles de la fonction sont par hypothèse distinctes, et leurs différences ont des modules finis.

Si les deux courbes comprenaient entre elles un des points pour lesquels deux valeurs de φ deviennent égales entre elles, la quantité désignée par Δ serait infiniment petite, et le raisonnement précédent serait en défaut. La valeur de la fonction φ relative au point B peut donc varier pour une même valeur initiale correspondant au point A, lorsque la courbe qui unit ces deux points, et par laquelle on représente les valeurs intermédiaires de la variable, se déforme infiniment peu en franchissant un des points pour lesquels deux valeurs de la fonction φ deviennent égales entre elles.

16. Pour éclairer ce qui précède par un exemple, considérons la fonction

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\sqrt{x+y\sqrt{-1}},$$

qui peut avoir, pour chaque point, deux valeurs égales et de signes contraires. Donnons-nous, pour $x=1$, $y=0$,

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=+1.$$

Cette hypothèse détermine la fonction pour des valeurs quelconques de x et de y supposées reliées aux valeurs initiales $x=1$, $y=0$, par une série continue de valeurs intermédiaires parmi lesquelles ne figurent pas $x=0$, $y=0$, pour lesquelles les deux valeurs de la fonction sont nulles toutes deux et par conséquent égales. Si l'on considère un point mobile partant du point A, dont les coordonnées sont $x=1$, $y=0$, et revenant au même point après avoir décrit une courbe continue, et que l'on attribue à x et à y les valeurs correspondant aux coordonnées des points de cette courbe, en revenant aux valeurs primitives x_0, y_0, la fonction reprendra sa valeur initiale si la courbe ne contient pas dans son intérieur l'origine des coordonnées; on pourra en effet, dans ce cas, en conservant les deux mêmes extrémités réunies en A, la réduire à zéro par une déformation continue, sans qu'elle ait à franchir ce point critique, et par conséquent sans altération de la valeur finale de φ. Il en sera autrement si l'origine est située dans l'intérieur de la courbe. Supposons par exemple que, partant du point dont les coordonnées sont $x=1$, $y=0$, on se déplace sur le cercle du rayon unité décrit de l'origine comme centre, et soit φ l'angle décrit

sur ce cercle à partir du point initial, dans le sens de la rotation qu'il faudrait imprimer à l'axe des X positifs pour le coucher sur celui des Y positifs, on aura

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$
$$\sqrt{x + y\sqrt{-1}} = \pm\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Lorsque φ est nul, nous adoptons par convention la valeur $+1$ et par conséquent le signe $+$ en dehors de la parenthèse. La continuité exige dès lors que l'on prenne toujours le signe $+$; car, la parenthèse n'étant jamais nulle, le changement du signe $+$ en signe $-$ entraînerait un changement brusque dans la valeur de la fonction. Lors donc qu'après avoir fait le tour de cercle on aura $\varphi = 2\pi$, on aura

$$\sqrt{\cos 2\pi + \sqrt{-1}\sin 2\pi} = \sqrt{1} = +(\cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi) = -1.$$

Ainsi donc, quoiqu'on soit revenu au point de départ, la fonction n'a pas repris sa valeur primitive qui était $+1$. La fonction $z^{\frac{1}{2}}$ est donc *essentiellement* ambiguë. Lorsque, par un choix arbitraire, on écarte l'une des valeurs correspondant à une valeur donnée de z, on la voit reparaître comme conséquence de la continuité.

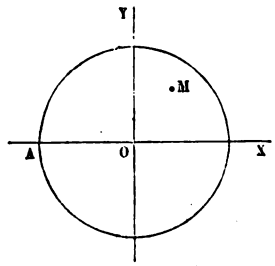
17. Considérons en second lieu la fonction

$$u = (1 + z)^m,$$

m désignant un nombre quelconque positif ou négatif. Lorsque x et y sont donnés, cette fonction admet des valeurs distinctes qui deviennent toutes égales à zéro ou à l'infini, suivant le signe de m, lorsque l'on suppose $x = -1$, $y = 0$. Adoptons donc, pour des valeurs données de x et de y, une valeur déterminée pour u; supposons par exemple que pour $x = 0$, $y = 0$, on prenne $u = 1$, et que l'on fasse ensuite varier x et y d'une manière continue pour leur faire acquérir les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$. Les valeurs successives de u seront déterminées, et il en sera de même de la valeur extrême qui restera invariable si la courbe qui représente les valeurs successives de x et de y se déforme en conservant les mêmes extrémités sans traverser le point correspondant à $x = -1$, $y = 0$. Cette condition sera nécessairement remplie si l'on assujettit le module de z à rester moindre que l'unité; les points correspondants resteront dans l'intérieur du cercle de rayon unité décrit de l'origine comme centre, et les courbes qu'ils décriront ne franchi-

ront jamais le point critique qui est situé sur le contour de ce cercle. Si donc on adopte cette convention, à chaque point de l'intérieur du cercle correspondra une valeur déterminée de u, qu'il est facile de calculer.

Fig. 1.



Soient O (*fig.* 1) l'origine des coordonnées correspondant à $z = 0$; A le point critique correspondant à $z = -1$, et M un point quelconque situé dans l'intérieur du cercle et correspondant à $z = x + y\sqrt{-1}$; on suppose que le point mobile parte de O pour arriver en M sans sortir du cercle de rayon unité, et l'on demande celle des valeurs de u qui correspond au point extrême M, en se rattachant par une série continue de valeurs intermédiaires à la valeur initiale $u = 1$ que l'on adopte pour le point O.

Posons

$$1 + x + y\sqrt{-1} = \rho'(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega);$$

ρ' et ω sont les coordonnées polaires du point M, lorsque l'on prend pour pôle le point A, et OX pour axe, l'angle ω pouvant, bien entendu, être augmenté ou diminué d'un multiple de 2π. On aura

$$u = \rho'^m(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)^m = \rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega),$$

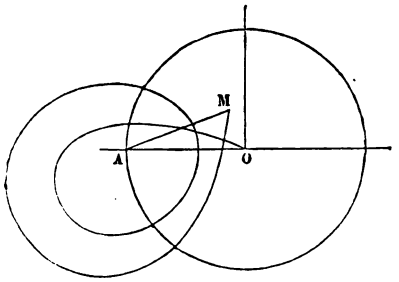
et il faut décider quelle valeur, dans cette expression, doit recevoir l'angle ω. Or, en supposant $z = 0$, on a, *par convention*, $u = 1$. On doit prendre, par conséquent, $\rho' = 1$, $\omega = 0$; z changeant d'une manière continue, ρ' et ω doivent varier aussi d'une manière continue, et il est évident que, le point M ne sortant pas du cercle de rayon unité décrit du point O comme centre, ω reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui dissipe toute ambiguïté.

Si le point auquel correspond la valeur de z pouvait se mouvoir librement sur le plan, la valeur correspondante de ω, variant d'une manière continue, pourrait n'être plus comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et, tout en assignant à u la valeur $+1$ comme correspondant à la valeur initiale $z = 0$, on devrait, pour chaque valeur de z, y compris même $z = 0$ considéré comme valeur finale, regarder u comme indéterminé. Il est clair, en effet, que, dans l'expression

$$(1 + z)^m = \rho'^m (\cos m\omega + \sqrt{-1} \sin m\omega),$$

$\omega = 0$ correspondant, par convention, à la valeur initiale $z = 0$, si le point du plan auquel correspond la valeur de z tourne autour du point A, ω qui est l'angle formé par le rayon vecteur AM avec l'axe AO recevra, à chaque révolution, un accroissement égal à 2π. Si, par exemple, le chemin suivi pour aller de O en M est celui que représente la *fig.* 2,

Fig. 2.



la continuité exige que l'on prenne ω égal à l'angle MAO augmenté de 4π, et l'on aura, dans cette hypothèse, en posant MAO $= \alpha$,

$$u = (1 + z)^m = \rho'^m [\cos(m\alpha + 4m\pi) + \sqrt{-1} \sin(m\alpha + 4m\pi)].$$

Si le point mobile revient en O après avoir fait une révolution autour de A, on aura

$$u = \cos 2m\pi + \sqrt{-1} \sin 2m\pi,$$

et l'hypothèse d'une valeur unique, $u = +1$, correspondant à $z = 0$,

est incompatible, par conséquent, avec la continuité de la fonction qui est essentiellement ambiguë si l'on ne limite pas, comme nous l'avions fait d'abord, les valeurs que peut prendre z.

18. Considérons enfin la fonction

$$u = \mathrm{l}(1 + z)$$

qui, pour chaque valeur de z, a, par définition, une infinité de valeurs distinctes qui deviennent toutes infinies quand on suppose $z = -1$. Pour $z = 0$, on a

$$u = \mathrm{l}\,1 = 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Prenons $k = 0$ et supposons, par conséquent, que, pour $z = 0$, u se réduise à zéro.

Si z, partant de la valeur zéro, change d'une manière continue, et que la courbe dont les points représentent ses valeurs successives ne passe pas par le point qui correspond à $z = -1$, les valeurs successives de $\mathrm{l}(1 + z)$ seront déterminées, et si l'on veut que z devienne égal à $x_1 + y_1\sqrt{-1}$, la valeur correspondante de u dépendra de la courbe par laquelle on aura réuni l'origine au point dont les coordonnées sont x_1, y_1; mais elle restera invariable si cette courbe se déforme sans traverser le point correspondant à $z = -1$, pour lequel toutes les valeurs de $\mathrm{l}(1 + z)$ sont infinies. Cette condition sera évidemment remplie si l'on assujettit, comme dans le cas précédent, le module de z à rester inférieur à l'unité. En adoptant cette convention, à chaque point intérieur au cercle de rayon unité décrit de l'origine comme centre correspondra une valeur déterminée de u que nous allons calculer.

On a (12)

$$\mathrm{l}(1 + x + y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\mathrm{l}[(1 + x)^2 + y^2] + \sqrt{-1}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{y}{x + 1}\right),$$

et il s'agit seulement de décider parmi les arcs dont la tangente est $\frac{y}{x+1}$ quel est celui que l'on doit adopter. Or, par hypothèse, pour $x = 0, y = 0$, on a

$$\mathrm{l}(1 + x + y\sqrt{-1}) = 0;$$

par conséquent, arc tang $\frac{y}{x+1}$ doit être pris égal à zéro. Cela posé, $\frac{y}{x+1}$ ne pouvant pas devenir infini lorsque le point dont les coordonnées sont x et y reste dans l'intérieur du cercle, arc tang $\frac{y}{x+1}$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui fait disparaître toute ambiguïté.

Si, par exemple, on pose

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

on trouve aisément

$$\begin{aligned} &l\left(1 + \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) \\ &\quad = l\left[\pm\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right)\right] \pm \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\left(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi\right), \end{aligned}$$

le signe $\pm$, qui précède $\cos\frac{1}{2}\varphi$ dans le premier terme, étant tel que le logarithme porte sur un nombre positif, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La valeur la plus générale de arc tang $\left(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi\right)$ est

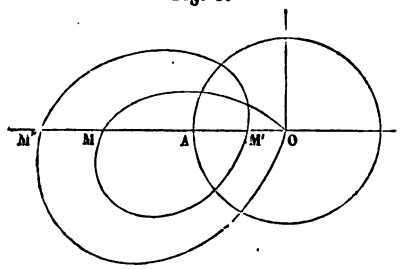
$$\frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

et la valeur du nombre entier k, pour laquelle cette expression est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, est évidemment unique.

Si l'on n'apportait aucune restriction aux valeurs intermédiaires que x et y peuvent prendre en passant des valeurs initiales $x = 0$, $y = 0$ à celles que l'on veut considérer, les conclusions précédentes ne seraient plus applicables; l'angle dont la tangente est $\frac{y}{x+1}$ est l'angle formé avec l'axe des X par le rayon vecteur qui réunit le point mobile au point fixe A, dont les coordonnées sont $y = 0$, $x = -1$; si le rayon vecteur fait plusieurs révolutions autour de son origine fixe, l'angle augmentera d'un nombre égal de fois 2π. Si, par exemple, on suppose que les valeurs successivement attribuées à x et à y soient les coordonnées

des points de la courbe fermée indiquée sur la *fig.* 3, qui part du point O et qui s'y termine,

Fig. 3.



la valeur initiale de $l(1+z)$, correspondant à $z=0$, étant toujours supposée nulle, lorsque z reprendra la valeur zéro après avoir reçu les valeurs intermédiaires qui correspondent aux points de la courbe OMM'M''O, on devra prendre arc tang $\frac{y}{x+1}=4\pi$, et l'on aura

$$l(1+z)=l(1)=4\pi\sqrt{-1}.$$

La fonction $l(1+z)$, si l'on veut qu'elle soit continue, est donc essentiellement indéterminée, de même que $(1+z)^m$, lorsque l'on n'impose aucune restriction aux valeurs que peut recevoir z.

Développement en série des fonctions imaginaires.

19. Certaines fonctions imaginaires sont définies par les séries qui les représentent : telles sont les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$; celles-là sont développables pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, en séries ordonnées suivant les puissances de la variable z dont elles sont des fonctions continues, toujours finies et déterminées. Une définition analogue est impossible pour des fonctions telles que $l(1+z)$ et $(1+z)^m$, dont les développements ne sont convergents que pour certaines valeurs de la variable; elle conduirait à admettre que, pour toutes les autres valeurs, la fonction cesse d'exister.

Si l'on posait, par exemple, comme définition,

$$l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots,$$

il faudrait regarder $l(1+z)$ comme infini, et, par conséquent, la fonction comme cessant d'exister, pour toute valeur de z dont le module surpasse l'unité. Il y aurait le même inconvénient à prendre comme définition de la fonction $(1+z)^m$ la série connue qui la représente lorsque z est réel et moindre que l'unité.

On peut d'ailleurs reconnaître *a priori* que les résultats auxquels nous a conduit l'étude des fonctions $l(1+z)$, $(1+z)^m$ sont incompatibles avec l'existence d'une série ordonnée suivant les puissances de z et représentant pour toute valeur de variable l'une ou l'autre de ces fonctions. La série, en effet, ne pourrait, pour chaque valeur de z, fournir qu'une seule valeur de la fonction, tandis que (17, 18) les définitions en indiquent plusieurs *qui sont inséparables les unes des autres.*

On ne résoudrait pas la difficulté en supposant l'existence de plusieurs séries distinctes en nombre égal à celui des valeurs de la fonction; car, chacune d'elles représentant une fonction continue et déterminée, leur ensemble ne pourrait pas partager cette propriété singulière reconnue à la fonction, de ne pouvoir être continue qu'à la condition d'échanger entre elles ses diverses valeurs, lorsque, après des variations convenables, la variable reprend sa valeur primitive.

20. Lorsqu'une fonction est définie pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, on peut assigner des limites hors desquelles son développement en série est impossible. Il faut, pour qu'une fonction soit développable en série, qu'elle soit continue, finie et bien déterminée pour les valeurs de la variable dont le module est moindre que le rayon du cercle de convergence de la série. On démontre que la série ne peut devenir infinie pour une valeur de la variable sans l'être également pour celles de module plus grand. Une fonction, qui devient infinie pour une valeur particulière de la variable ayant un module R, ne peut donc être développable que pour des valeurs de module inférieur à R. Cette remarque s'applique à la dérivée de la fonction; car la dérivée d'une série convergente, ordonnée suivant les puissances de la variable, est toujours convergente : ainsi, par exemple, arc tang z ayant pour dérivée $\frac{1}{1+z^2}$, qui devient infinie pour $z=\sqrt{-1}$, ne peut être développable en série ordonnée suivant les puissances de z, que pour des valeurs de z dont le module ne surpasse pas l'unité.

21. Pour qu'une fonction soit développable en série ordonnée suivant les puissances de la variable, il faut enfin qu'elle soit bien déterminée,

c'est-à-dire qu'à chaque valeur de la variable puisse correspondre une valeur unique de la fonction. Il semble, au premier abord, qu'il soit toujours possible de faire disparaître l'ambiguïté, en faisant un choix entre les valeurs de la fonction, de manière à n'en laisser subsister qu'une seule pour chaque valeur de la variable; mais on a vu qu'une pareille convention est quelquefois incompatible avec la continuité de la fonction, qui est une condition non moins nécessaire de l'existence d'un développement. Pour cette raison, la fonction $(1+z)^m$, ne peut pas, d'après ce qui a été dit (17), être développée en série convergente pour des valeurs de z dont le module surpasse l'unité. Si l'on impose, au contraire, à z la condition de ne recevoir que des valeurs dont le module soit moindre que l'unité, aucune des conditions énoncées ne s'oppose à la possibilité d'un développement, qui, dès lors, comme Cauchy l'a démontré, est possible et déterminé.

Développement de $\mathrm{l}(1+z)$.

22. Nous pouvons dès à présent démontrer la légitimité du développement de $\mathrm{l}(1+z)$ pour les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est moindre que l'unité. On a, en effet, identiquement et quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de z,

$$(1)\qquad \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots - z^{2n-1} + \frac{z^{2n}}{1+z}.$$

Si le module de z est moindre que l'unité, celui de z^{2n} tend vers zéro, et, par conséquent, $\frac{1}{1+z}$ est représenté par la série convergente

$$(2)\qquad \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots - z^{n-1} + z^{2n} - \ldots.$$

Il résulte de là que $\mathrm{l}(1+z)$, dont la dérivée est $\frac{1}{1+z}$, ne diffère que par une constante de la série

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots - \frac{z^{2n}}{2n} + \ldots,$$

dont la dérivée est le second membre de (2), et si l'on admet que pour $z = 0$, $\mathrm{l}(1+z)$ soit nul comme la série, on aura

$$(3)\qquad \mathrm{l}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots - \frac{z^{2n}}{2n} + \ldots,$$

qui se trouve démontrée pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que l'unité; $l(1+z)$ dans cette formule est une fonction continue de z, et a, par conséquent, la valeur calculée (18); c'est la seule qui soit compatible avec la double condition imposée à la fonction, d'être continue et de s'annuler avec z.

23. En posant

$$z = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on a (18)

$$\begin{aligned} &l(1+\rho\cos\varphi+\rho\sqrt{-1}\sin\varphi) \\ &\quad = \frac{1}{2}l(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi)+\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi}, \end{aligned}$$

l'arc défini par sa tangente devant être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En introduisant la même valeur de z dans la série et égalant les parties réelles et imaginaires, on aura

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}l(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi) &= \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\cos 3\varphi - \ldots, \\ \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi} &= \rho\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\sin 3\varphi - \ldots; \end{aligned}$$

en supposant $\rho = 1$, et remarquant que

$$2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

on a donc

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{1}{2}l\,4\cos^2\frac{1}{2}\varphi &= \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \ldots \pm \frac{\cos n\varphi}{n} \mp \ldots, \\ \frac{\varphi}{2} + k\pi &= \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots \pm \frac{\sin n\varphi}{n} \mp \ldots, \end{aligned}$$

le nombre entier k étant tel que le premier membre de la seconde équation soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si φ est compris lui-même

entre $-\pi$ et $+\pi$, on doit prendre $k = 0$, et l'on a

$$(6)\qquad \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots \pm \frac{\sin n\varphi}{n} \mp \ldots.$$

On voit que, si φ augmente d'une manière continue, la série qui forme le second membre change brusquement au moment où l'on a $\varphi = \pi$, et la somme passe d'une valeur infiniment peu différente de $\frac{\pi}{2}$ à une valeur infiniment peu supérieure à $-\frac{\pi}{2}$. On peut en conclure que les dérivées des termes de la série doivent, pour cette valeur de φ, avoir une somme infinie; c'est ce que l'on vérifie aisément, car, pour $\varphi = \pi$, chacune de ces dérivées prend la valeur -1.

Si, dans les formules (4), on suppose $\rho = -1$, elles se réduisent à

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2} l\, 4 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi &= -\left(\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} + \ldots\right), \\ \operatorname{arc\,tang}\left(-\cot\frac{1}{2}\varphi\right) &= -\left(\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \ldots\right); \end{aligned}$$

l'arc, dont la tangente est $-\cot\frac{1}{2}\varphi$, est $\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un nombre entier déterminé, puisque l'on sait que l'arc est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si φ est compris entre 0 et 2π, il faut prendre $k = 0$, et l'on a par conséquent, pour de telles valeurs de φ,

$$(8)\qquad \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi \ldots.$$

24. Les formules (6) et (8) étant vraies toutes deux lorsque φ est compris entre 0 et π, on peut les ajouter, et l'on en déduit la formule remarquable

$$(9)\qquad \frac{\pi}{2} = 2\left(\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} - \ldots\right),$$

qui a lieu pour les valeurs de φ comprises entre 0 et π.

Si l'on change φ en $-\varphi$, le second membre change évidemment de signe sans changer de valeur et devient égal à $-\frac{\pi}{2}$, et comme il ne

change pas lorsque φ augmente de 2π, il en résulte que, pour toute valeur de φ, la série

$$\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} - \ldots$$

est égale à $\pm\frac{\pi}{4}$, le signe $+$ correspondant au cas où $\sin\varphi$ est positif et le signe $-$ au cas où il est négatif. Lorsque φ est un multiple de π, tous les termes deviennent nuls et la formule est en défaut. Si l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on a

$$(10) \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots\right),$$

formule connue de Newton.

FIN DU PREMIER VOLUME.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Fig. 5.

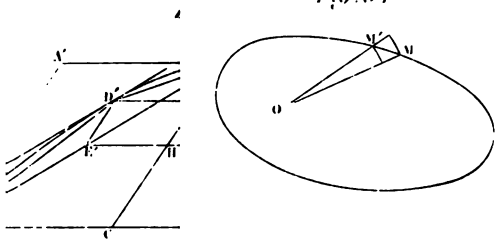


Fig. 9.

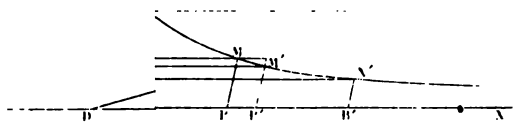


Fig. 13.

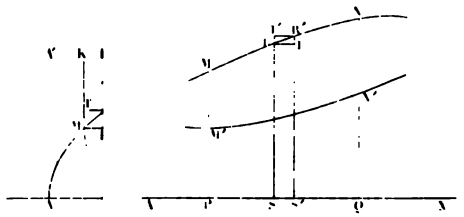
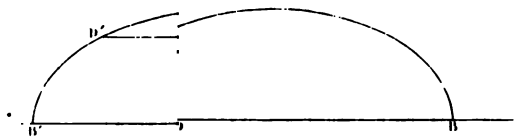


Fig. 17.



Pulv. sc.

Fig. 19.

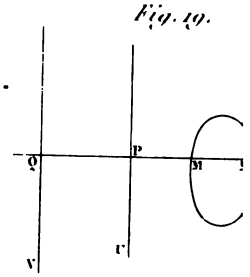


Fig. 22.

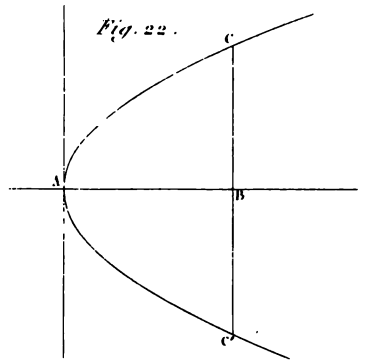


Fig. 24.

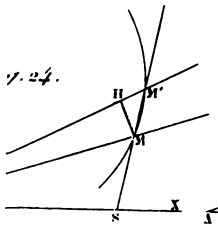


Fig. 27.

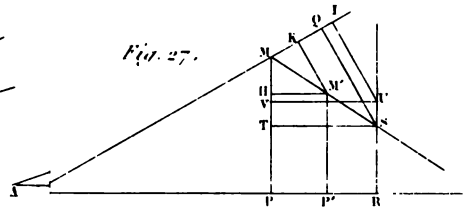


Fig. 29.

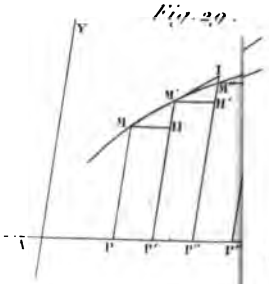


Fig. 32.

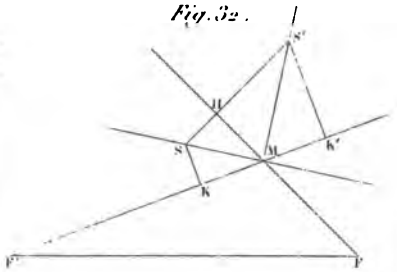
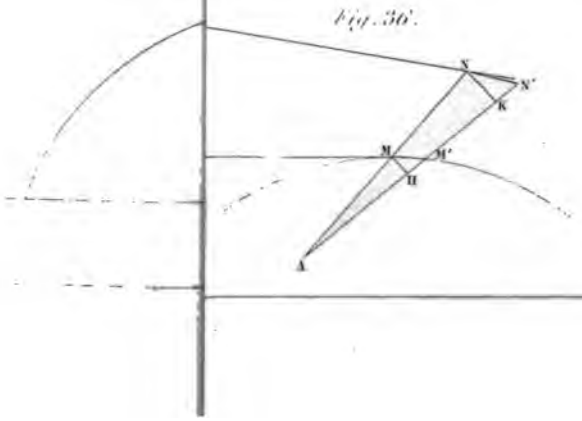


Fig. 36.



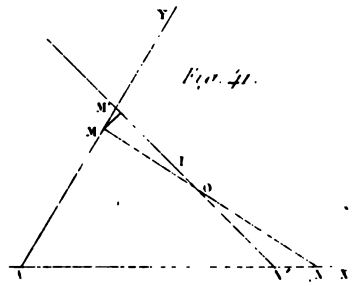
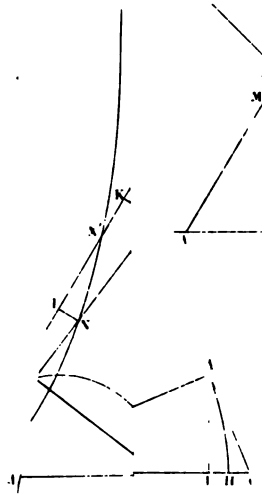


Fig. 41.



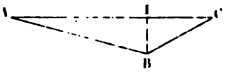


Fig. 46.

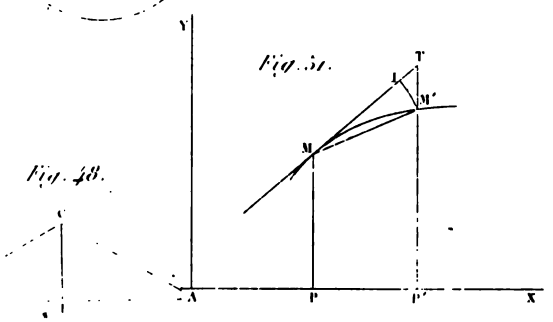


Fig. 51.

Fig. 48.

Fig. 53.

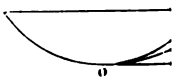
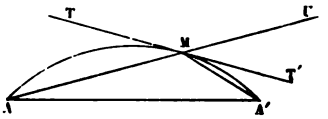


Fig. 56.



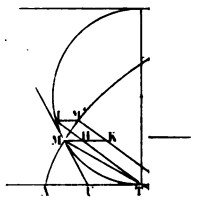
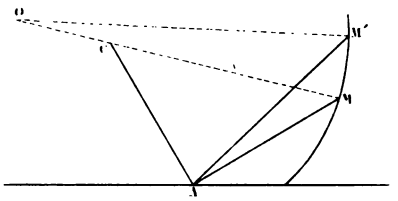


Fig. 60.



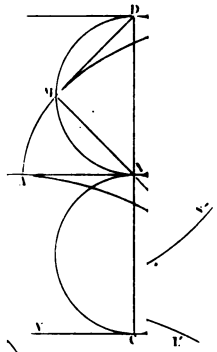
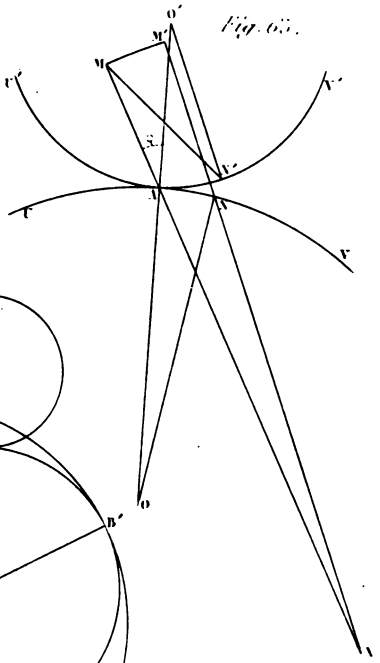


Fig. 61.



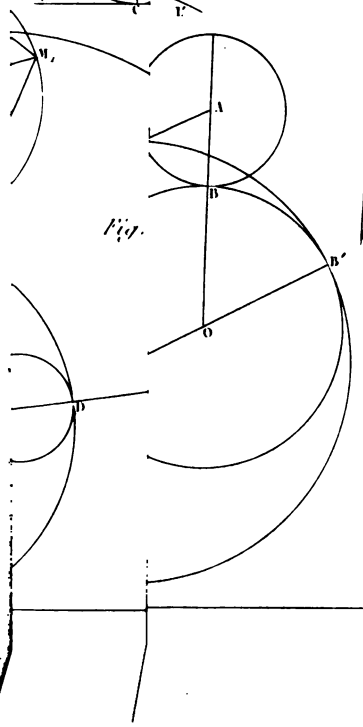


Fig.

Pl. V.

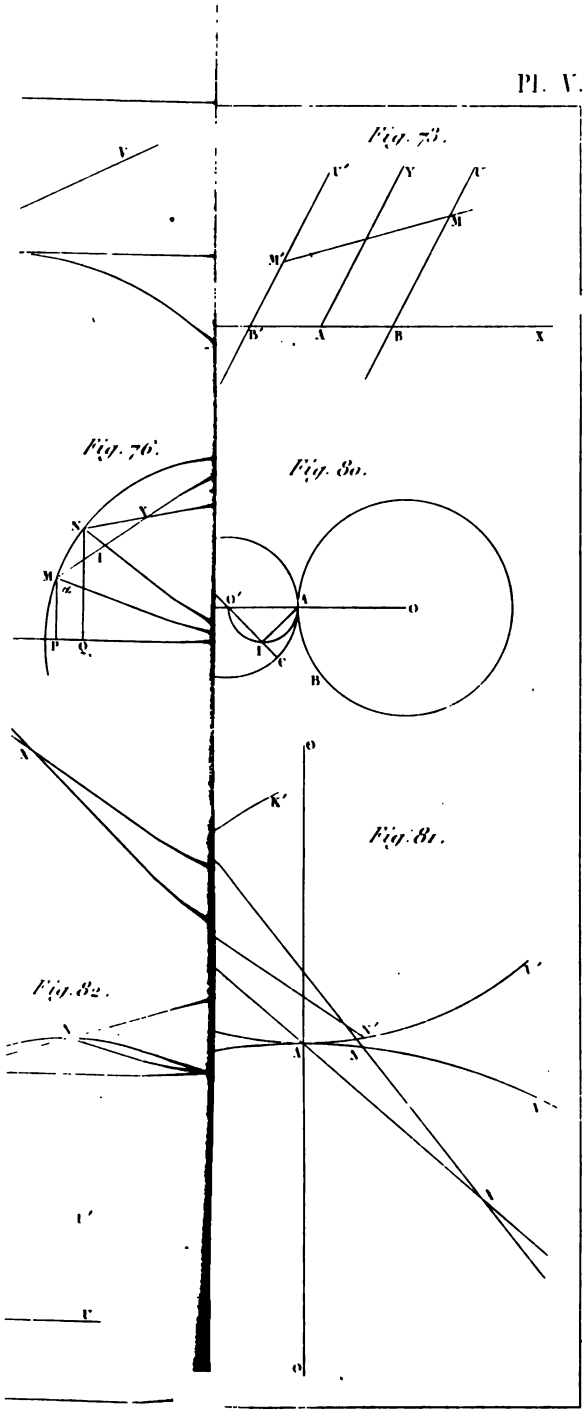


Fig. 84.

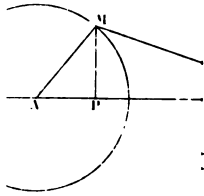


Fig. 86.

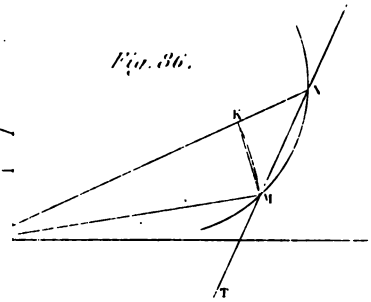


Fig. 90.

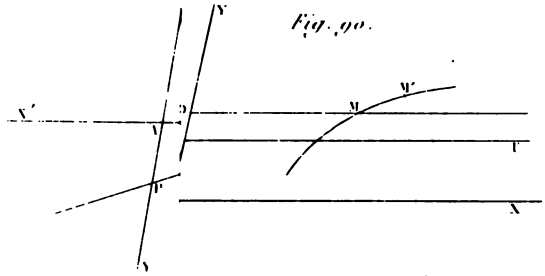
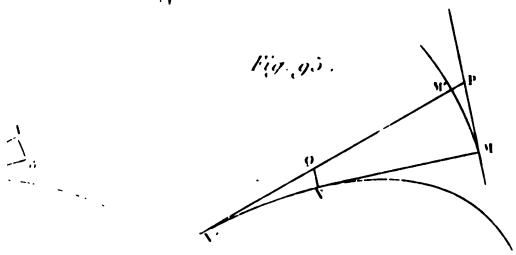



Fig. 95.